Chapitre 3

Géométrie dans l'espace

Hors Sujet

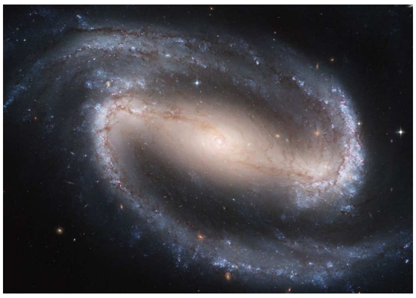
Titre : « Swim »
Auteur : Caribou
Présentation succinte de l'auteur : Depuis ses débuts sous le nom de Manitoba, le canadien Dan Snaith n'en finit plus de sonder en profondeur l'électro-pop. Passé l'expérience Manitoba, Dan s'est accaparé les commandes du groupe Caribou. groupe qui n'a jamais cherché à écrire la pop-song parfaite, celle que l'on se prend à fredonner dans la rue. La démarche pop et la dimension psychédélique du groupe se concentre sur la structure chirurgicale des morceaux. Il y a cette impression tenace de tenir avec l'album *Swim* l'alchimie parfaite entre les expérimentations audacieuses d'Animal Collective et les comptines électronica de Four Tet. Caribou atteint ici un niveau insoupçonné d'homogénéité et semble parvenir à une sorte de plénitude. *Swim* se révèle plus sombre que ses prédécesseurs, mais jamais plombant, notamment sur l'électro 80's d'un Leave House chancelant et sur le fantastique Found Out dont les trois minutes d'électro-pop risquent fortement de parasiter durablement vos pensées par la force d'un thème d'une simplicité désarmante.
Caribou signe là un brillant album de pop électronique ingénieuse et démontre une fois de plus tout le génie de Dan Snaith. Il n'en reste pas moins que Caribou est un groupe prenant toute sa mesure en live où ses prestations psychédéliques révèlent tout leur pouvoir hypnotique et il y a fort à parier qu'avec ce nouvel album, les prochains concerts vont être sublimés.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 3



Géométrie dans l'espace

Résumé

Nous allons tenter à travers ce chapitre de nous familiariser avec ce que l'on appelle la dimension 3 : l'espace. Une des plus grandes difficultés sera de parvenir à voir des figures spatiales, alors qu'elles sont tracées sur une feuille (donc dans un plan), c'est-à-dire en dimension 2.
Nous rappellerons quelques règles de perspective cavalière, ainsi que les pièges qu'il faudra éviter.
L'élève curieux peut se demander si on peut aller plus loin dans les dimensions... En effet, durant la scolarité, on ne cesse d'augmenter le nombre de dimension, 1 avec les droites, 2 avec la géométrie plane et 3 avec l'espace. Et bien oui ! On peut définir des espaces de dimension 4, le plus connu étant l'espace-temps. Il devient difficile par contre de représenter de telles géométries...
On peut aussi se demander si la perspective cavalière est la seule manière de représenter l'espace. La réponse est non, en peinture il n'est pas rare de voir une autre manière de représenter l'espace : la perspective parallèle.

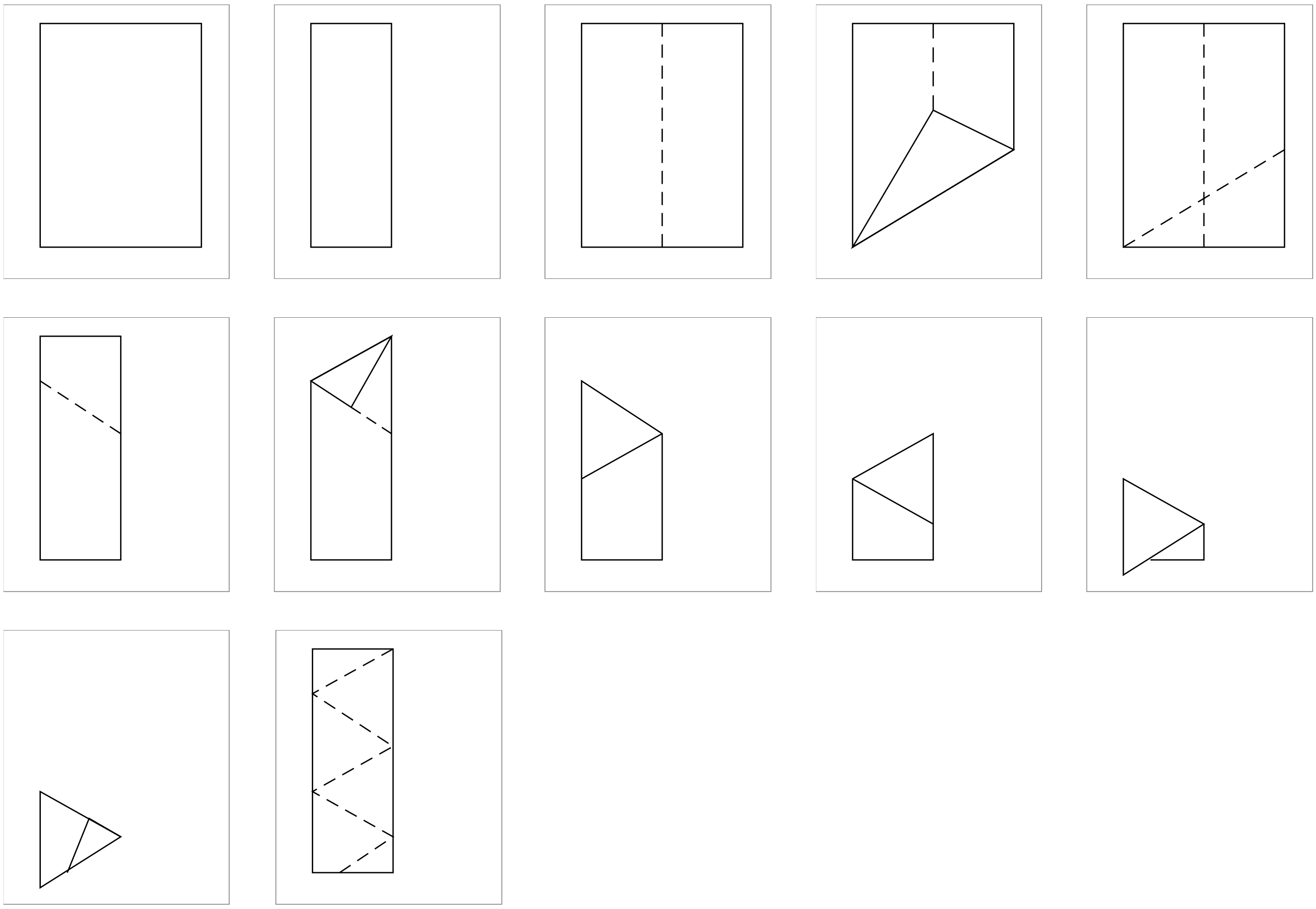
I) Rappels de la géométrie de collège

Cette partie se construit tout au long d'une activité, consistant à étudier un tétraèdre et sa construction en origamie.

I-1 Les solides : construction, représentation, volume

Travail de l'élève **1. Construction d'un tétraèdre régulier en origamie**

1. Visionner le film de la construction d'un solide en origamie, sur le site de Bricomath.
2. Quel est la nature du solide construit ?
3. Grâce à la série de schémas fournie ci-dessous, construire vous-même ce solide, et marquer votre nom dessus.
4. Quelle semble être la nature des faces de ce solide ?
   On parle de tétraèdre régulier.
5. A quelle étape de la construction apparaît la première face du solide ?
6. Construire deux patrons différents de tétraèdre régulier de côtés 4 cm.
7. Représenter un tétraèdre régulier en perspective cavalière.



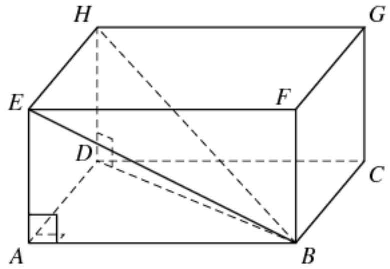
La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme suffisamment évidentes pour ne pas les définir ici.
Rappelons tout de même qu'un plan est représenté en général par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans toutes les directions (comme la droite est représentée par un segment).

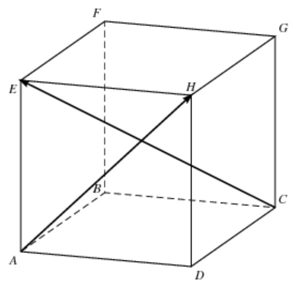
En perspective cavalière :

1. Les segments visibles sont dessinés en traits pleins ; les autres sont dessinés en pointillés.
2. Des points alignés sont représentés par des points alignés.
3. Deux droites de l'espaces parallèles (dans un plan) sont représentées par deux droites parallèles.
4. Des droites concourantes (dans un plan) sont représentées par des droites concourantes.
5. **Attention !** Des droites concourantes sur le dessin ne le sont pas forcément dans la réalité !
6. Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
7. Dans un plan de face, une figure est représentée à l'échelle, dans les autres plans, les tailles sont réduites proportionnellement.
8. **Attention !** Les angles ne sont pas conservés (sauf dans le plan de face)

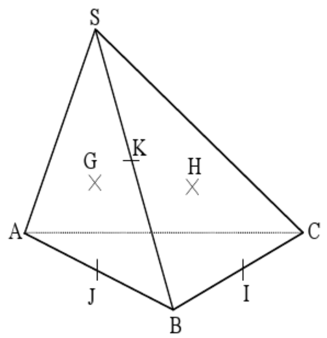
Exemples :

Les segments $[AD]$ est $[DC]$, non visibles, ont été représentés en pointillés contrairement au segment $[AB]$.
Les droites (AB) est (DC) sont parallèles et sont représentées comme deux droites parallèles.
Notons que les droites (HD) et (BD) sont perpendiculaires mais ne sont pas représentées comme telles.





Dans ce deuxième exemple on peut observer que les droites non sécantes (EC) et (AH) se coupent pourtant sur le dessin.



Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$, $[AB]$ et $[SB]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle SAB. Il est donc sur la médiane (SJ). Les points S, J et G sont alignés.
De même H est le centre de gravité du triangle SBC. Il est sur la droite (SI).
Les droites (AC) et (SB) ne sont pas concourantes dans l'espace, mais elles se coupent sur le dessin.

Exercices du livre :

n° 8 + 9 p 31

Les patrons

Un patron de solide est obtenu en plaçant toutes ses faces dans un même plan.

Remarques :

- Un même solide peut avoir plusieurs patrons possibles (non superposables).
- Certains solides n'ont pas de patrons : c'est le cas de la sphère.

Exemple :

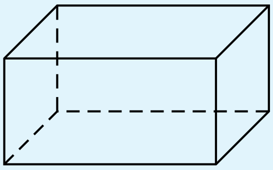
Représenter deux patrons de pavé droit de dimensions 2 cm, 3 cm et 4 cm (cf p 290)

Exercices du livre :

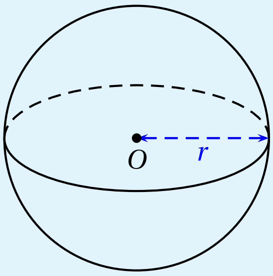
n° 1 + 5 + 10 p 30

Quelques solides et leur volume (cf formulaire p 290-291)

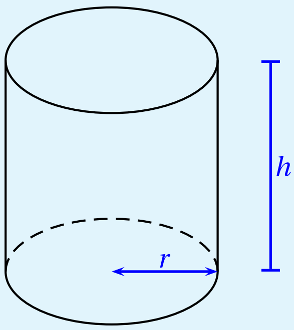
Parallélpipède rectangle : $V = L \times l \times h$.



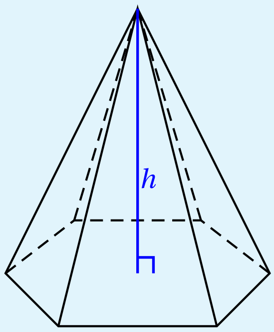
Sphère : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$



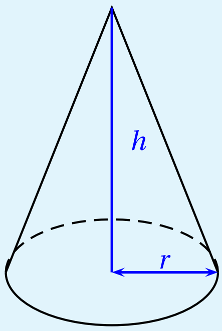
Cylindre de révolution : $V = \pi \times r^2 \times h$.



Pyramide : $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{h}}{3}$.



Cône de révolution : $V = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.



I-2 Axiomes et premières propriétés

En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les Éléments d'Euclide.Aujourd'hui, on l'utilise en logique mathématique pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie, appelé axiomatique, doit être non-contradictoire ; c'est sa seule contrainte. Un axiome ne peut être remis en cause à l'intérieur de cette théorie et représente donc plutôt un point de départ dans un système de logique.
L'axiomatique peut être choisi arbitrairement mais la pertinence d'une théorie en dépendra. En réalité, c'est de la non cohérence de son interprétation que vient la réfutation d'une théorie et, par voie de conséquence, de son axiomatique. L'axiome est donc à la logique mathématique, ce qu'est le postulat à la physique théorique.

Axiomes d'incidences

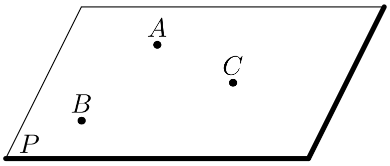
En géométrie dans l'espace, il s'agit des règles qui fournissent les relations entre les points, les droites et les plans.

- Deux points **non confondus** sont nécessaires et suffisent pour définir et nommer une droite.
- Trois points **non alignés** sont nécessaires et suffisent pour définir et nommer un plan.
- Si M et N sont deux points d'un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points de la droite (MN) appartiennent à $\mathscr{P}$.

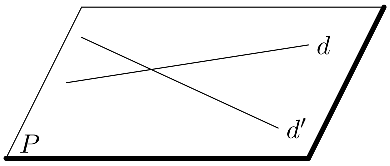
Remarques :

– On nomme un plan par trois points non alignés entre parenthèses (ceci permet de le différencier du triangle).
– Un plan peut donc être déterminé par l'une des conditions : suivantes :

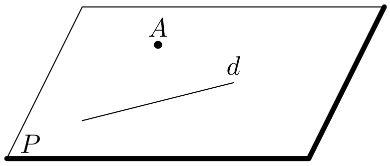
trois points non alignés



deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



Définition 1 :

Quand des éléments de l'espace appartiennent à un même plan, on dit que ces éléments sont **coplanaires**.

Remarque : Deux ou trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

Théorème 1 :

Lorsque tous les éléments d'un problème sont coplanaires, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent (Thalès, Pythagore ...)

Remarque : Dans un problème de géométrie dans l'espace, on essaiera donc toujours de se placer dans un plan (que l'on prendra la peine de préciser) pour raisonner.

Exercices du livre :

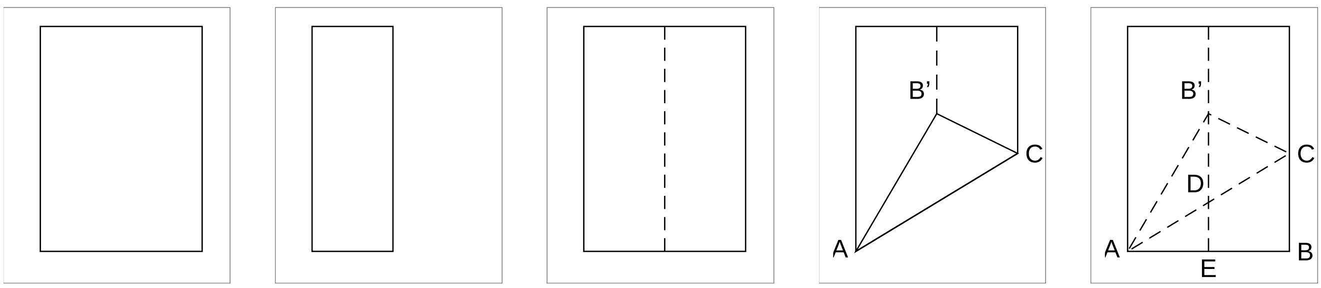
Activité 2 p 23

I-3 La géométrie plane

<u>Travail de l'élève</u> **2. Etude d'une face du tétraèdre**

Dans cette partie, nous allons démontrer que les faces obtenues lors de la construction sont des triangles équilatéraux.

Rappels de la construction par des schémas :



1. Constats immédiats :

a. Grâce à la construction, que pouvez-vous dire sur B et B' ?

b. En déduire que les angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{B'DC}$ sont de même mesure.
Notons β cet angle.

c. Grâce à la construction, que pouvez-vous dire sur (BC) et $(B'D)$?

d. En déduire que les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{B'DC}$ sont égaux.

   - **e.** Que pouvez-vous en déduire sur la nature du triangle BCD ?

2. En utilisant les théorèmes de collège :
   - **a.** En vous plaçant dans le triangle ABC, expliquez pourquoi D est le milieu de $[AC]$.
   - **b.** En déduire que $AD = DC = BD$
   - **c.** Que pouvez-vous en déduire sur la nature du triangle BCD ?

I-3.1 Droites remarquables du triangle

Cf Thème 14 p 287

I-3.2 Quadrilatères

Cf Thème 16 p 288

I-3.3 Des théorèmes importants

Cf Thème 15 p 288

I-3.4 Symétries

Cf Thème 19 p 289

I-3.5 Trigonométrie

Cf Thème 17 p 289

Travail de l'élève **3. Etude du tétraèdre**

On appelle $\mathscr{T}$ le tétraèdre construit précédemment.

1. **a.** Par construction, que vaut la hauteur h d'une des faces ?
   - **b.** En déduire la longueur a des arêtes de $\mathscr{T}$.
   - **c.** Calculer l'aire d'une face de $\mathscr{T}$.
2. **a.** Représenter à main levée en perspective cavalière le solide $\mathscr{T}$.
   Appeller IJK la face au sol et L le sommet opposé. Placer le centre de gravité G de IJK.
   - **b.** Déterminer la longueur IG.
   - **c.** Calculer la hauteur LG du tétraèdre.
3. En déduire le volume du tétraèdre.

Exercices du livre :

n° 6-7 p 30 + 29 - 30 - 32 - 33 p 32

Travail de l'élève **4. Duplication du tétraèdre**

1. En assemblant plusieurs des tétraèdres construits précédemment, construire un nouveau tétraèdre aux dimensions doublées.
2. Quelle est la forme du « trou » au coeur du nouveau tétraèdre ? (tiges aimentées + perspective cavalière)
3. Quelle est le volume du trou ?

Remarques :

- « Etant donnée un carré, construire un carré d'aire double. »
  Selon Platon, Socrate aurait proposé ce problème à un esclace afin de démontrer que la connaissance est en chacun de nous.
- On raconte que pour enrayer une épidémie de peste qui décomait Athènes, les habitants de l'île de Délos décidèrent de doubler le volume de l'autel dédié à Apollon. Ce n'est qu'au XIX^e siècle que l'on a démontré que cette construction était impossible à la règle non graduée et au compas !

II) Positions relatives

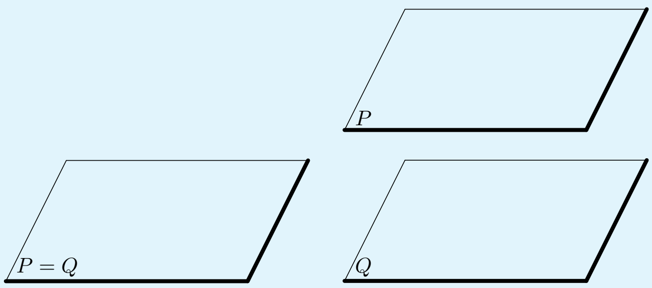
***Travail de l'élève* 5.** *Repérer autour de nous*

1. Combien de pieds faut-il au minimum pour qu'une chaise soit stable ?
2. Repérer dans la salle de classe :
   - **a.** Des plans qui sont parallèles ;
   - **b.** Des plans qui se coupent. Quelle semble être leur intersection ?
   - **c.** Des droites parallèles et des droites sécantes ;
   - **d.** Des droites qui ne semblent ni parallèles ni sécantes.

De deux plans

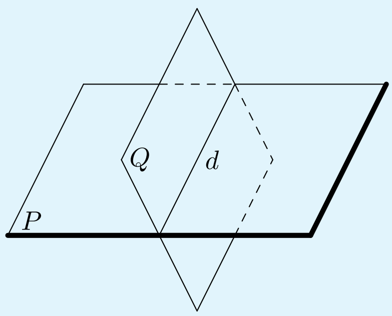
Soient P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. Les plans sont parallèles (confondus ou strictement).



parallèles confondus parallèles strictement

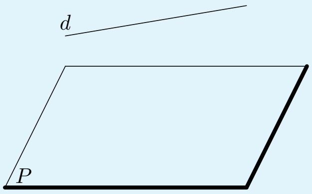
2. Les plans ont un point commun A et sont distincts. Alors ils sont sécants suivant une droite passant par A.
   Ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs A et B sont sécants suivant la droite (AB)



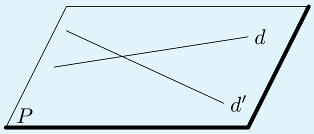
Une droite et un plan

Soient d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. La droite est parallèle à une droite de ce plan (éventuellement elle-même). Alors la droite est parallèle au plan.

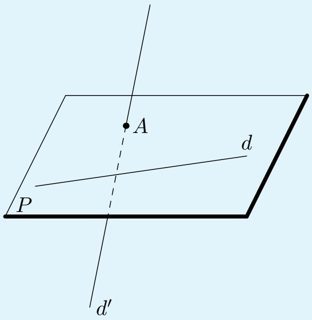


parallèle strictement



droites incluses dans le plan

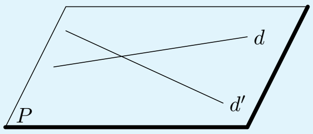
2. La droite et le plan ne sont pas parallèles. Ils n'ont qu'un point commun et sont dits sécants,



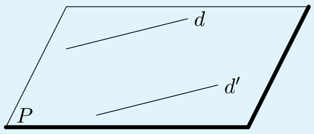
Deux droites

Soient d et d' deux droites de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. Il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires.
   Elles sont alors soit sécantes ou soit parallèles (strictement ou confondues) dans ce plan.

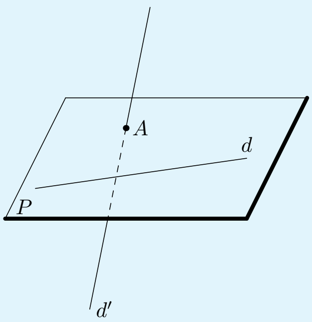


deux droites sécantes



deux droites parallèles

2. Il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires (et elles non pas de points commun !)



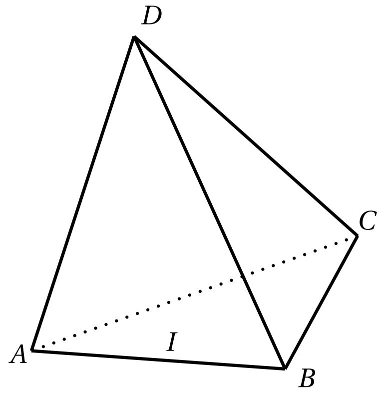
Remarque : Dans l'espace,

– Deux droites sans points commun ne sont pas forcément parallèles ! Elles peuvent être non coplanaires.
– Deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont pas toujours de point commun ! Elles peuvent être non coplanaires.
– Un plan est entièrement déterminer par deux droites sécantes.
– Un plan est entièrement déterminer par deux droites strictement parallèles.

Exercice 1 :

$ABCD$ est un tétraèdre et I est le milieu de $[AB]$.
Compléter les phrases mathématiques suivantes à l'aide des symboles

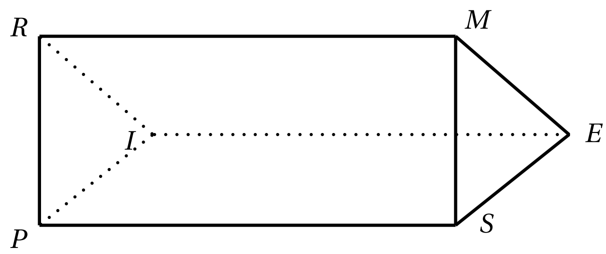
$$\subset, \quad \in, \quad \notin, \quad \not\subset$$



1. $I \ldots (AB)$
2. $B \ldots (CDI)$
3. $(CI) \ldots (ABC)$
4. $D \ldots (BI)$
5. $(AB) \ldots (CBA)$
6. $(DI) \ldots (BCI)$
7. $B \ldots (ADI)$
8. $B \ldots (IA)$

Exercice 2 :

PRISME est un prisme droit à base triangulaire.
Déterminer les positions relatives :



1. des droites (RE) et (MI).
2. des droites (PI) et (EM).
3. de la droite (EM) et du plan (IPS).
4. de la droite (SR) et du plan (PMR).
5. du plan (IRP) et du plan (IEM).

Exercice 3 :

$ABCDE$ est une pyramide, dont la base $BCDE$ est un quadrilatère tel que (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$. K est le point du segment $[AD]$ tel que $AK = \dfrac{3}{4}AD$.

1. Déterminer la position relative :
   a. des droites (IJ) et (BC)
   b. des droites(JK) et (CD)
2. Déterminer l'intersection :
   a. de la droite (JK) et du plan (BCD)
   b. des plans (ABC) et (ADE).

Exercices du livre :

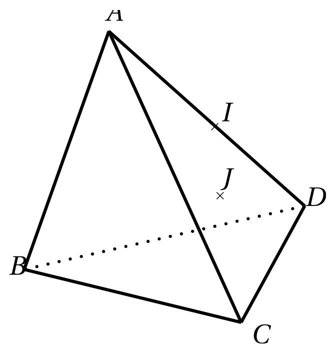
n° 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 p 31

Application : section d'un solide par un plan

Pour tracer la section d'un solide par un plan, il faut déterminer et tracer les intersections de ce plan avec toutes les faces du solide.

Exemple :

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[AD]$. Le point J est sur la face ACD tel que (IJ) ne soit pas parallèle à (AC).
Tracer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJB).



Solution :

I et J sont deux points du plan (ACD), par conséquent :

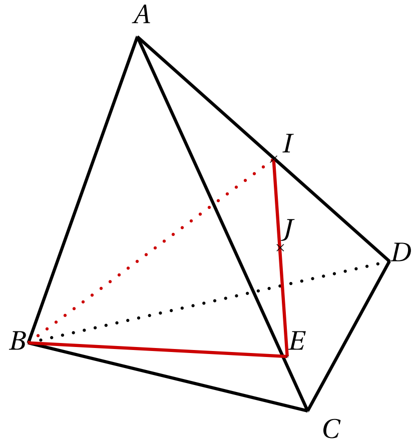
$$(IJ) \subset (ACD)$$

. Comme $B \notin (ACD)$ les plans (IJB) et (ACD) ne sont pas confondus, comme I est commun aux deux plans, leur intersection est une droite : il s'agit de la droite

$$(IJ)$$

La trace du plan (IJB) sur la face ACD est donc le segment $[IE]$ (où E est le point d'intersection des droites (IJ) et (AC), tracée ci-dessous en rouge.
On démontre de la même manière que la trace du plan (IJB) sur la face ABD est le segment $[BE]$, puis que la trace du plan (IJB) sur la face ABD est le segment $[BI]$.

Ainsi la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJB) est le triangle BIE, en rouge sur le schéma suivant :



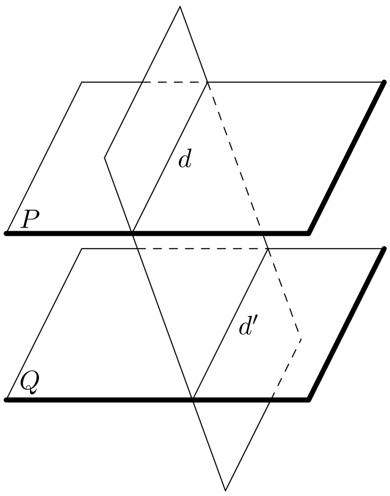
III) Parallélisme dans l'espace

La liste des propriétés n'est pas exhaustive…certaines propriétés "évidentes" concernant le parallélisme dans l'espace n'apparaissent pas dans cette section.

III-1 Parallélisme entre droites

Théorème 2 :
Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Théorème 3 :
Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.



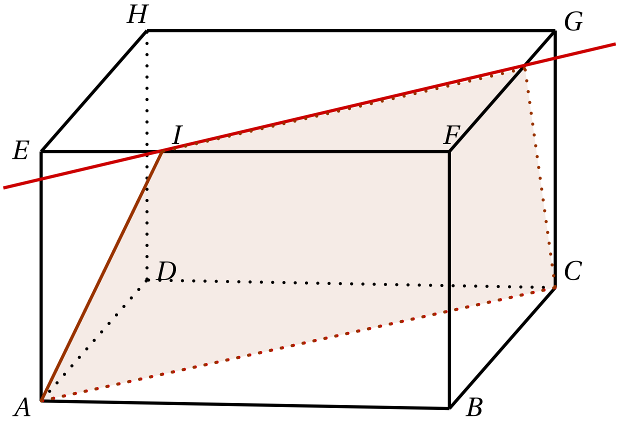
Preuve
Soient D_1 et D_2 les droites d'intersection. Elles sont coplanaires, donc soit parallèles, soit sécantes. Or si elles sont sécantes en un point M alors M appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, ce qui est absurbde. Donc elles sont strictement parallèles.

Exemple :

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Soit I un point de $[EF]$. Déterminer et tracer l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

Solution **:**

Les plans (ABC) et (EFG), qui contiennent les faces $ABCD$ et $AFGH$ du pavé, sont parallèles.
$I \in (ACI)$, mais $I \notin (ABC)$, donc les plans (ACI) et (ABC) ne sont pas confondus. Comme A et C sont deux points communs aux plans (ACI) et (ABC), on peut conclure que les plans (ABC) et (ACI) sont sécants selon la droite (AC).
On a donc $(ABC)//(EFG)$ et $(ACI) \cap (ABC) = (AC)$.
On en déduit que le plan (ACI) coupe également le plan (EFG), selon une droite parallèle à (AC).
L'intersection de ces deux plans est donc la droite parallèle à (AC) passant par I.

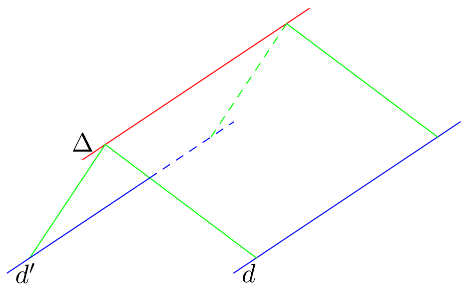


Remarque : L'intersection se note à l'aide du symbole $\cap$. Ainsi si la droite d est l'intersection des plans P et Q, on note :

$$d = P \cap Q$$

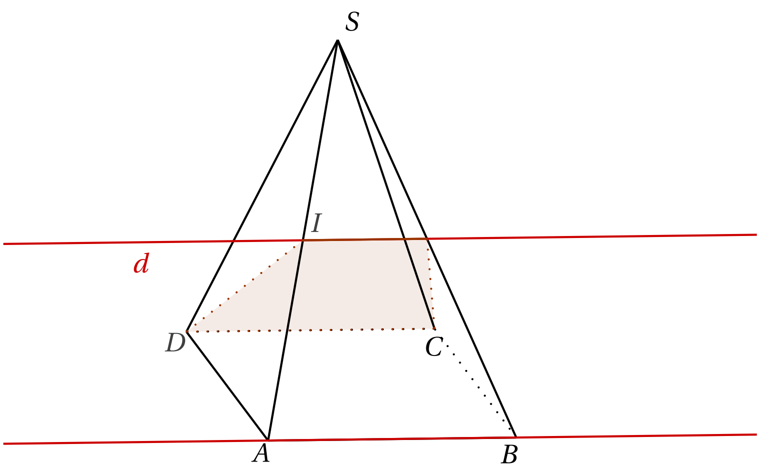
Théorème 4 : *Théorème du toit*

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d'.
Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.



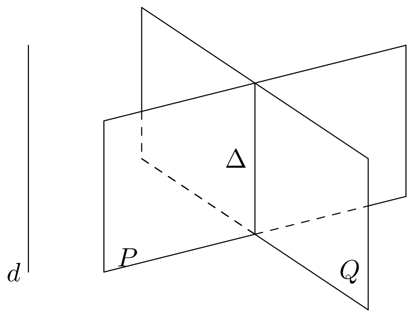
Exemple :

Soit $SABCD$ une pyramide régulière de sommet S à base carrée. Soit I le milieu de l'arête $[SA]$. Le plan (CDI) coupe le plan (SAB) selon une droite d.
Démontrer que d est parallèle à (AB).



Solution :
Les plans (CDI) et (SAB) sont sécants selon la droite d. Or le plan (CDI) contient la droite (CD) et le plan (SAB) contient la droite (AB), et les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (comme supports des côtés du carré de base de la pyramide). D'après le théorème du toit, la droite d est donc parallèle à la droite (AB).

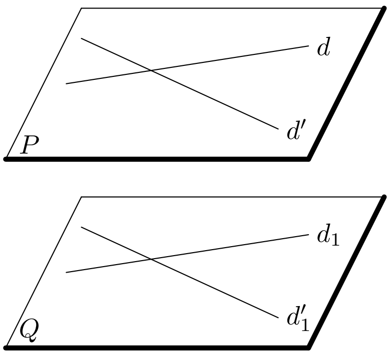
Corollaire 1 :
Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.



III-2 Parallélisme entre plans

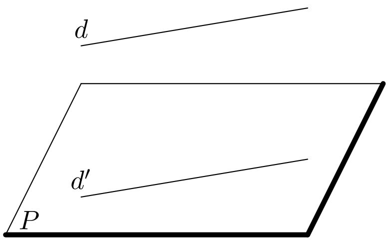
Théorème 5 :
Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Théorème 6 :
Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.



III-3 Parallélisme entre droites et plans

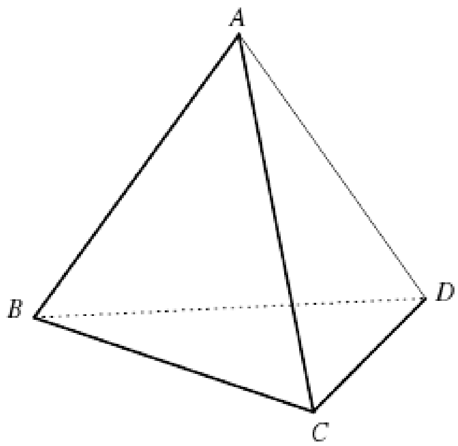
Théorème 7 :
Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan P contenant la droite d'.



Exemple :

Soient $ABCD$ un tétraèdre et I, J, K, M et N les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
2. Déterminer les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'intersection des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM) et (IJK).
3. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
4. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1 // \mathscr{D}_2$.
5. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
6. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Exercices du livre :

n° 21 + 22 + 24 + 25 + 26 + 27 p 32

IV) Informatique

IV-1 Algorithme

Exercice 4 **:**

On a écrit un algorithme à l'aide du logiciel Algobox. Voici ce qui a été saisi :

```
VARIABLES
  Rayon EST_DU_TYPE NOMBRE
  Hauteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  Volume EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer le rayon"
  LIRE Rayon
  AFFICHER "Entrer la hauteur"
  LIRE Hauteur
  Volume PREND_LA_VALEUR Math.PI*pow(Rayon,2)*Hauteur/3
  AFFICHER "Le Volume est égal à "
  AFFICHER Volume
FIN_ALGORITHME
```

1. Que fait cet algorithme ?
2. Quelles sont les variables en entrée ?
3. Quelles sont les variables en sortie ?
4. En s'inspirant de l'exercice précédent, écrire un algorithme affichant :
   a. Le volume d'une boule lorsque l'on saisit le rayon ;
   b. L'aire latérale totale d'un cylindre de révolution lorsque l'on saisit le rayon du disque de base et la hauteur.

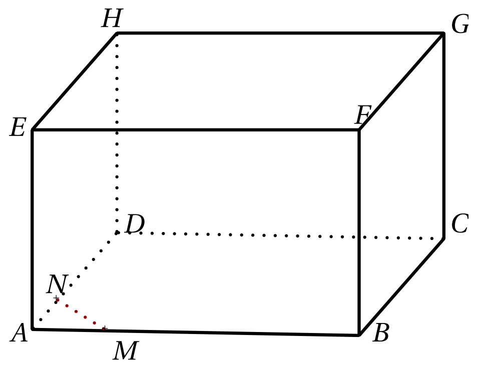
IV-2 TP : Géogébra

Exercice 5 :

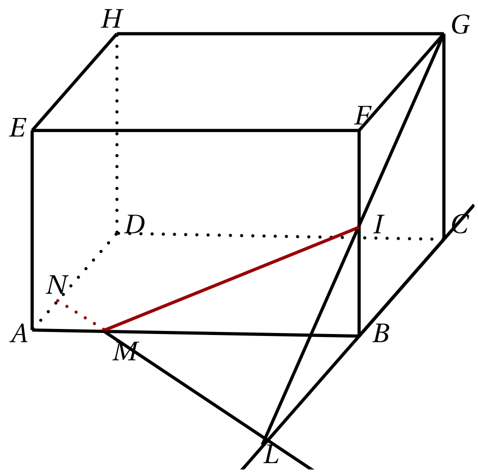
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes $[AD]$ et $[AB]$.
Tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (MNG) à l'aide du logiciel géogébra.

Voici les différentes étapes :

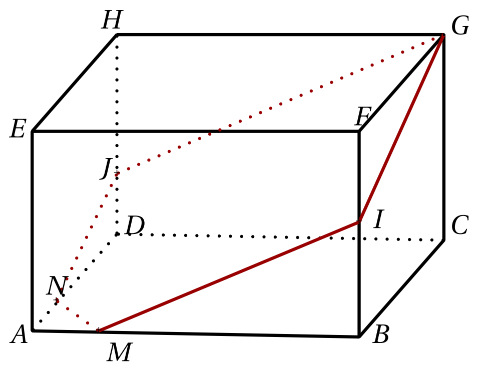
1. **Trace du plan (MNG) sur la face $ABCD$**
   M et N sont deux points communs aux plans (ABC) et (MGN).
   L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN), et la trace du plan (MGN) sur la face $ABCD$ est donc le segment $[MN]$. (en pointillés rouge sur la figure).



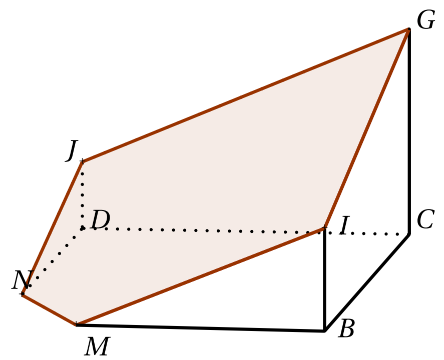
2. **Trace du plan (MNG) sur les faces $BCGF$ et $ABFE$.**
   Le point G est commun aux plans (MNG) et (BCG). Il suffit de trouver un second point commun aux deux plans.
   $(MN) \subset (MGN)$ et $(BG) \subset (BCG)$ donc le point d'intersection de (MN) et (BC) appartient à la fois aux plans (MNG) et $(BCG$. Appelons L ce point. On en déduit que l'intersection des plans (MNG) et (BCG) est la droite (GL).
   Soit I le point d'intersection de (GL) et (BF) : les segments $[GI]$ et $[MI]$ sont les traces du plan (MNG) sur les faces $BCGF$ et $ABFE$ respectivement (en traits pleins rouge sur la figure).



3. **Traces du plan (MNG) sur les faces $CGHD$ et $ADHE$**
   Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. Le plan (MGN) coupe le plan (BCG) selon la droite (GI). On en déduit que (MGN) coupe (ADH) selon une droite parallèle à (GI).
   $N \in [AD] \subset (ADH)$ donc $N \in (ADH)$.
   De plus, par définition $N \in (MGN)$. N appartient donc à l'intersection des plans (MGN) et (ADH).
   On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite parallèle à (GI) passant par N.
   Cette droite coupe l'arête $[DH]$ en un point J : les segments $[NJ]$ et $[JG]$ sont donc les traces du plan (MNG) sur les faces $ADHE$ et $CGHD$ respectivement (en traits pointillés rouge sur la figure).



4. **Section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (MGN).**
   La section du pavé par le plan (MGN) est donc le pentagone $MIGJN$.



V) Quelques exercices d'applications

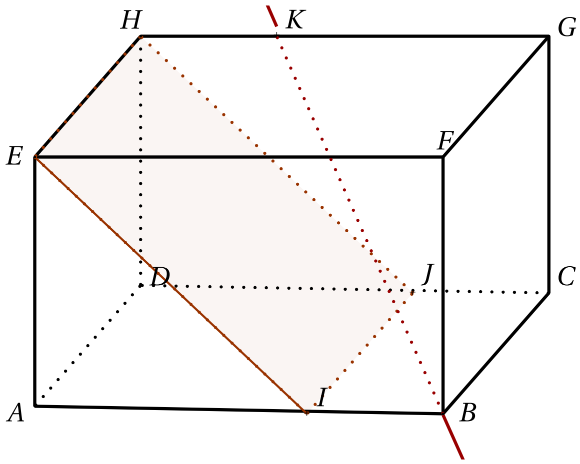
V-1 Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

Exercice 6 :

Dans un pavé droit $ABCDEFGH$, on place les points I, J et K respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[CD]$ et $[GH]$ tels que :

$$BC = CJ = HK$$

1. De quelle nature est le quadrilatère $IBKH$?
2. Que peut-on dire des droites (BK) et (IH) ?
3. En déduire que la droite (BK) est parallèle au plan (HIJ).



Solution :

1. Comme $HK = IB$ et comme $(HK)//(IB)$ le quadrilatère $IBKH$ a deux côtés parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.
2. $IBKH$ est un parallélogramme, donc $(KB)//(IH)$.
3. (KB) est parallèle à une droite du plan (HIJ), elle est donc parallèle au plan (HIJ).

Exercice 7 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I et J les points situés respectivement sur $[AB]$ et sur $[AH]$ tels que :

$$AI = \frac{1}{4}AB \qquad \text{et} \qquad AJ = \frac{1}{4}AH$$

Démontrer que $(IJ)//(BFH)$

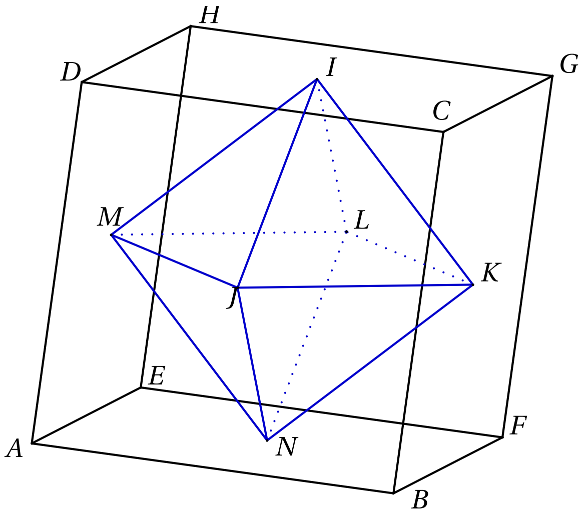
V-2 Démontrer que des plans sont parallèles.

Exercice 8 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

Soit I, J, K, L, M et N les centres respectifs des face du cube (voir ci-dessous). Le solide $IJKLMN$ est un octaèdre régulier (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux). On veut démontrer que les faces opposées de l'octaèdre sont parallèles.

1. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (HC).
2. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (MN).
3. Démontrer que les plans (IKL) et $JMN)$ sont parallèles.



Solution :

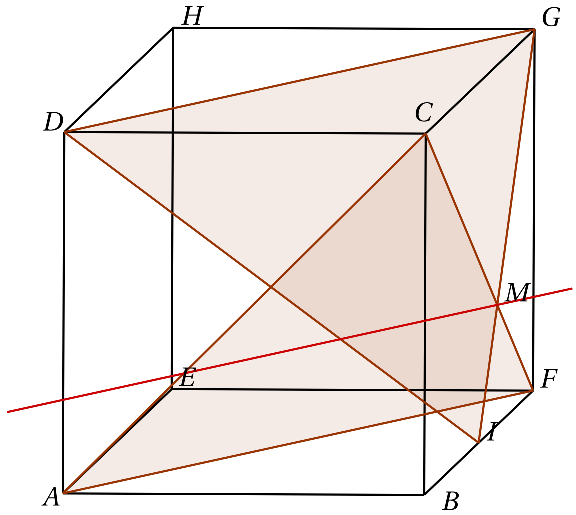
1. Dans le triangle HFC : I est le milieu de $[HF]$ et K celui de $[FC]$. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(IK)//(HC)$.
2. Dans le triangle AHC : N est le milieu de $[AC]$ et M celui de $[AH]$. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(MN)//(HC)$. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. Donc $(IK)//(MN)$.
3. De la même manière, on démontre que (JN) et (IL) sont parallèles. Ainsi, dans le plan (IKL), se trouvent deux droites sécantes, qui sont respectivement parallèles à deux droites sécantes du plan (JMN) : on en déduit que les plans (IJK) et (JMN) sont parallèles.
   Ce résultat reste vrai pour toute paire de faces opposées de l'octaèdre.

V-3 Déterminer l'intersection de deux plans

Exercice 9 :

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de l'arête $[BF]$.

Déterminer et tracer l'intersection des plans (AFC) et (DIG).

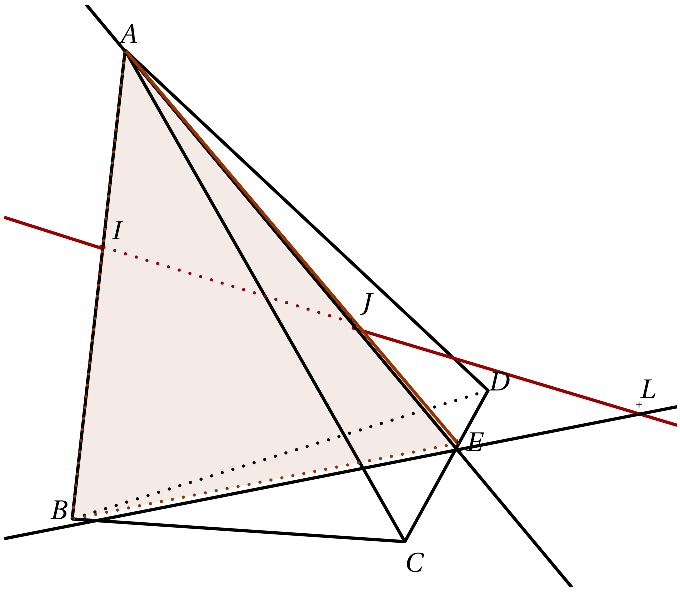


Solution :
On commence par chercher un point commun aux deux plans.
La droite (GI) est contenu dans les plans (DIG) et (BFG). De même la droite (CF) est contenu dans les plans (AFC) et (BFG). Par conséquent (CF) et (GI) sont sécantes, en un point que l'on appelera M (elles ne peuvent en aucun cas être parallèles).
Il est difficile, ici, de trouver un deuxième point commun. En revanche on remarque que $(DG)//(AF)$ car ses droites portent les diagonales de deux faces opposées du cube.
Or $(DG) \subset (DIG)$ et $(AF) \subset (AFC)$, d'après le théorème du toit, on en conclut que la droite d'intersection des plans (DIG) et (AFC) est parallèle aux deux droites (DG) et (AF).
On peut ainsi tracer la droite recherchée : c'est la droite passant par le point M et parallèle aux droites (DG) et (AF).

Exercice 10 :
Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze avec $(AB)//(CD)$. Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD), puis des plans (SAB) et (SCD).

V-4 Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Exercice 11 :
Soit $aBCD$ un tétraèdre. I est un point de l'arête $[AB]$. J est un point de la face ACD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).



Solution :

On cherche un plan auxiliaire, contenant la droite (IJ) et coupant le plan (BCD) ; ici le plan (AIJ) convient.
La droite (IJ) n'est pas contenu dans le plan (BCD) et n'est pas parallèle au plan (BCD) donc elle est sécante au plan (BCD).
La droite (AJ) coupe la droite (CD) en un point qu'on appelle E (on observe ici la face ACD).
Les droites (IJ) et (BE) sont toute entière contenu dans le plan (AIJ) et comme (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD), la droite (IJ) est sécante avec la droite (BE). Notons L l'intersection de (BE) et (IJ). L est alors le point cherché.

Les Annexes