EXERCICES : $\mathbb{R}$, UN ENSEMBLE TOTALEMENT ORDONNÉ

Exercice 1 :

Mettre en équation les problèmes suivants :

– Trouver un nombre tel que son triple augmenté de 8 soit égal à son double diminué de 5.
– Un père a 25 ans de plus que son fils ; dans 5 ans il aura le double de l'âge de son fils. Quel est l'âge du fils ?
– Existe-t-il deux nombres dont la somme est égale à 8 et le produit égal à 5 ?
– Un article augmente de 5%, son nouveau prix est de 8€. Quel était le prix avant augmentation ?
– Si on ajoute un même nombre au numératuer et au dénominateur de la fraction $\frac{2}{7}$ on obtient $\frac{1}{3}$. Quel est ce nombre ?
– $ABCD$ est un carré de côté 6. Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du triangle AMD soit la moitié de l'aire du trapèze $MBCD$?

Exercice 2 :

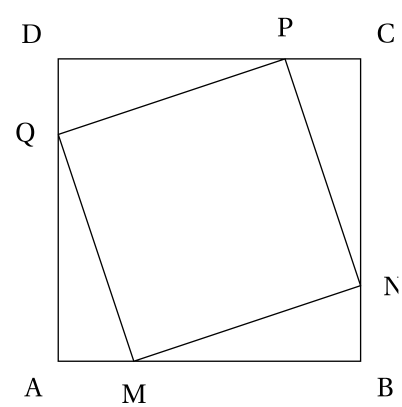
Que penser des affirmations suivantes ? *Justifier* à l'aide d'expressions algébriques.

– Pour doubler l'aire d'un carré, il suffit de doubler la longueur du côté.
– Si l'on augmente le côté d'un carré de 3 cm, son aire sera augmentée de 9 cm^2.
– $ABCD$ est un carré. Si l'on réduit AB de 1cm et qu'on allonge BC de 1 cm, l'aire du rectangle obtenu sera égale à celle du carré de départ.
– $NOUK$ est un carré. Si l'on réduit le côté NO de 1cm et qu'on allonge OU de 1 cm, l'aire du rectangle obtenu aura diminué de 1 cm^2 par rapport à celle du carré de départ.

Exercice 3 :

Soit $ABCD$ un carré et M, N, P et Q les points placés sur les côtés de $ABCD$ tels que $AM = BN = CP = DQ = a$ comme sur la figure ci-contre.
On appelle alors b le nombre tel que $a + b = AB$.

1. En remarquant que MN est la diagonale d'un rectangle de côté a et b, *comparer* MN et MQ.
   Que peut-on en *déduire* sur la nature de $MNPQ$?
2. *Expliquer* pourquoi l'angle $\widehat{QMN}$ est droit.
   Que peut-on en déduire sur la nature de $MNPQ$?
3. *Déterminer* l'aire de $ABCD$ et celle de AMQ, en fonction de a et b.
   En *déduire* l'aire de $MNPQ$ en fonction de a et b.
4. On appelle c la longueur du côté de $MNPQ$.
   Quelle est alors son aire en fonction de c ?
5. Quel célèbre théorème vient-on de redémontrer ?



Exercice 4 :

On se propose de résoudre le problème suivant :
« Peut-on trouver un réel positif qui, une fois élevé au cube, a la même valeur que son double augmenté de 1 ? »

1. Mettre le problème en équation.
2. Vérifier que -1 est une solution de l'équation mais pas du problème.
3. Vérifier que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution du problème.

Le nombre ϕ est appelé nombre d'or. On le retrouve en particulier en architecture pour caractériser des proportions harmonieuses.

Exercice 5 :

– Le carré d'une somme de deux nombres est-il égal à la somme des carrés de ces nombres ?
– L'opposé du produit de deux nombres est-il égale au produit des opposés de ces nombres ?
– La différence des inverses de deux entiers consécutifs non nuls est-il l'inverse de leur produit ?

Exercice 6 :

Voici deux programmes de calcul :

Programme de calcul A
– Prendre un nombre réel
– Retrancher 6
– Elever au carré

Programme de calcul B
– Prendre un nombre réel
– L'élever au carrés
– Retrancher 12 fois le nombre initial
– Ajouter 36

1. Tester ces programmes de calcul, avc un nombre de votre choix, avec -3, $\dfrac{4}{7}$ et avec $\sqrt{5}$.
2. Que remarque-t-on ?
3. Démontrer votre conjecture.
4. Quel(s) nombre(s) faut-il prendre au départ pour obtenir 9 ? -3 ? 0 ?

Exercice 7 :

Soit les nombres $A = (1-2\times10^{-8})(1+2\times10^{-8})$ et $B = (1-2\times10^{-8})+(1+2\times10^{-8})$

1. A l'aide de la calculatrice collège, effectuer en une unique séquence le calcul de A, puis celui de B.
2. En posant $x = 2\times10^{-8}$ développer et réduire A et B.
3. En déduire les valeurs exactes de A et B.
4. Conclure

Exercice 8 :

1. **a.** Calculer sans calculatrice :

$$1\,000^2 - 999^2 \quad ; \quad 1\,001^2 - 1\,000^2 \quad ; \quad 1\,002^2 - 1\,001^2$$

   b. Que peut-on conjecturer à partir de ces trois résultats ?
2. Pour tout entier positif n, montrer que $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$
3. En déduire que tout nombre impair est une différence de deux carrés consécutifs.
4. Ecrire 199 comme différence de deux carrés.

Exercice 9 :

À quel ensemble appartiennent les nombres décimaux ?

Exercice 10 :

On considère un parallélépipède rectangle de dimension x, x et 16cm. Faire un schéma de la situation. Sachant que son volume V vaut 900cm^3, calculer la longueur x du côté de sa base carré.

Exercice 11 :

Le but de cet exercice est de montrer grâce aux équations que $0,999\,999\cdots = 1$!

1. On considère le nombre rationnel $A = \dfrac{19}{11}$.
   a. Donner le développement décimal de A avec 8 chiffres significatifs (précision à 10^{-8}).
   b. A semble-t-il décimal ?
   c. On dit que A a une écriture périodique. Préciser sa période (nombre entier qui se répète à l'infini dans le développement décimal du nombre).
2. On considère le nombre $x = 0,131313\dots$
   a. Montrer que $100x = 13 + x$
   b. En déduire la valeur de x et sa nature.
3. Par le même raisonnement, déterminer l'écriture fractionnaire du nombre y dont le développement périodique est $y = 0,173173173\dots$ avec pour période 173 (on note ce genre de nombre ainsi $y = 0,\underline{173}$).
4. En remarquant que le nombre $a = 3,\underline{40}$ peut s'écrire $3 + 0,\underline{40}$, montrer que $a = \dfrac{337}{99}$.
   Il est démontré que, contrairement au nombre irrationnels (tel π ou $\sqrt{2}$), tout nombre rationnel admet un développement périodique.
5. Montrer par le même raisonnement que $0,\underline{9} = 1$

Ce dernier résultat n'est pas une erreur : la notation $0,\underline{9}$ est une autre écriture de 1 !

Exercice 12 :

Résoudre l'inéquation $x - 4 > 2$. Représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exercice 13 :

Soient x et y tels que $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y < 2$. Encadrer $x + y$. Représenter cet ensemble sur une droite graduée.

Exercice 14 **:**

Soient x et y deux réels.

1. On considère l'algorithme suivant :
- Entrée : Saisir x et y
- Traitement :
  - a prend la valeur $(x+y)^2$
  - b prend la valeur (x^2+y^2)
- Sortie : Afficher $a-b$

   a. Qu'affiche la machine pour $x=3$ et $y=4$? $x=3$ et $x=-4$? $x=-3$ et $y=-4$?

   b. Conjecturer le signe $a-b$ suivant les signes de x et y.

   c. En déduire la comparaison de a et b suivant les signes de x et y.

2. Développer et réduire $(x+y)^2-(x^2+y^2)$

3. En déduire la comparaison du carré de la somme de deux réels avec la somme de leurs carrés