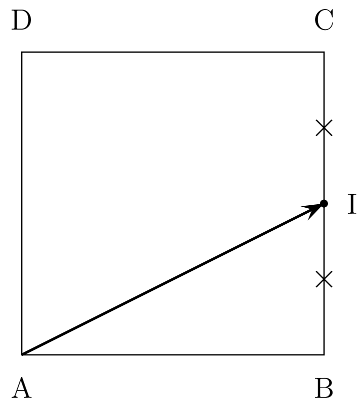
Exercices : Les vecteurs

Exercice 1.

1. Construire l'image du carré $ABCD$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$



2. Construire l'image d'un parallélogramme $ABCD$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ où O est le centre du parallélogramme.

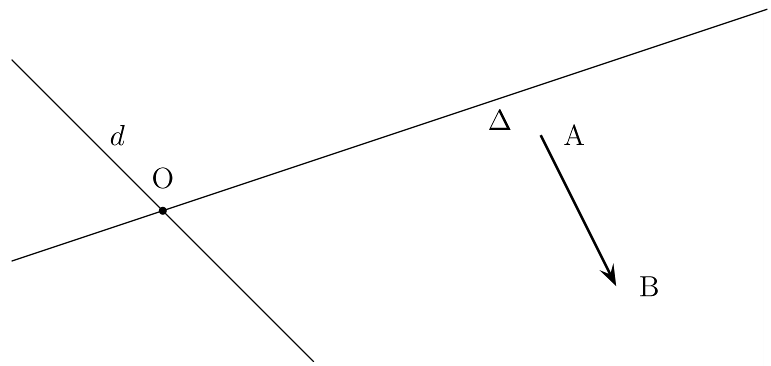
Exercice 2. ABC est un triangle, I le milieu de $[BC]$ et J le symétrique de B par rapport à A.

1. Construire le point K image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
2. Quelle est l'image de J par la translation de vecteur $\overrightarrow{CK}$

Exercice 3. ABC est un triangle équilatéral

1. Construire le point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
2. Construire E, F et G images respectives de A, C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
3. (a) Pourquoi les points B, D, G, F et E appartiennen-ils au cercle de centre C passant par A ?
   (b) Pourquoi l'hexagone $ABDGFE$ est-il régulier ?

Exercice 4. deux droites d et Δ sont sécantes en O, A et B sont deux points disposés comme l'indique la figure ci-dessous :



1. Construire la droite Δ', image de Δ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
2. La droite Δ' coupe d en C et la parallèle à (AB) menée par C coupe Δ en D. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 5. $ABCD$ est un quadrilatère non croisé et on note t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$

1. (a) Construire les points M et N tels que $M = t_{\overrightarrow{AC}}(A)$ et $N = t_{\overrightarrow{AC}}(C)$
   (b) Construire l'image du triangle ABC par t
2. (a) Préciser la nature du quadrilatère $ACMN$
   (b) Démontrer que
$$\mathscr{A}(ABD) = \mathscr{A}(ADM)$$
$$\mathscr{A}(BDC) = \mathscr{A}(DCN)$$
   (c) En déduire que :
$$\mathscr{A}(ACNM) = 2\mathscr{A}(ABCD)$$

Exercice 6. Démontrer que pour tous points O, A et B on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Exercice 7. ABC est un triangle, on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

1. Placer les points E, F, G et H tels que :
$$\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v} \qquad \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}$$
$$\overrightarrow{AG} = -\vec{u} - \vec{v} \qquad \overrightarrow{AF} = -\vec{u} + \vec{v}$$
2. Placer les points M et N tel que : $\overrightarrow{MA} = \vec{u} + \vec{v} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{NM} = \vec{u} - \vec{v}$

Exercice 8. Simplifier au maximum les relations suivantes :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$

2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$

Exercice 9. Recopier et compléter les propriétés suivantes :

1. G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{AG} = \dots \overrightarrow{AI}$ (I désigne le milieu de $[BC]$)
2. G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \dots$

Exercice 10. Soit ABC un triangle.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$
3. Démontrer que les droites (CE) et (FB) sont parallèles

Exercice 11. $ABCD$ est un parallélogramme

1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB}$
2. Placer les points G et H tels que $BAEG$ et BAFH soient des parallélogrammes
3. Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$
4. En déduire que les points C, G et I sont alignés

Exercice 12. ABC est un triangle et O un point quelconque à l'intérieur de ABC

1. Placer les points I, J et K tels que $OABI$, $OBCJ$ et $OCAK$ soient des parallélogrammes.
2. Démontrer que O est le centre de gravité du triangle IJK

Exercice 13. Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante, et, dans chaque cas, illustrer par une figure :

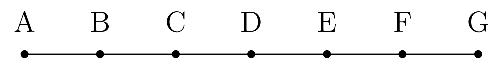
1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(a) $ABCD$ est un parallélogramme
(b) $ABDC$ est un parallélogramme
(c) D est le milieu de $[AB]$
(d) $ADBC$ est un parallélogramme

Exercice 14. Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
3. $\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

Exercice 15. Le segment $[AG]$ est divisé en 6 parties de même longueur.



Compléter les relations suivantes par :

1. La lettre qui convient :

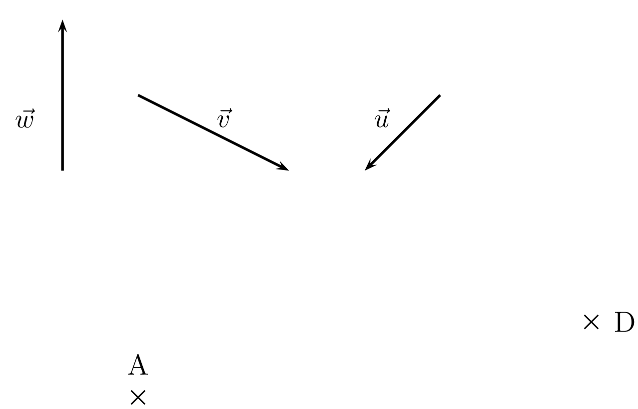
   (a) $\overrightarrow{E\ldots} = -2\overrightarrow{EF}$ (b) $\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots G} = \overrightarrow{0}$ (c) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{A\ldots}$

2. Le nombre qui convient :

   (a) $\overrightarrow{CE} = \ldots\overrightarrow{AG}$ (b) $\overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{GE}$ (c) $\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{GE}$

Exercice 16.

1. Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
   Représenter les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} - \vec{u}$
2. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \vec{w} - 3\vec{u}$ et $\overrightarrow{DF} = -\dfrac{1}{2}\vec{w} + \vec{u}$



Exercice 17. Soit ABC un triangle.
Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB}$$

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont-ils la même direction ? Justifier.

Exercice 18. Soient A et B deux points tels que $AB = 5$ cm.
Soit M le point défini par : $-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$
Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M

Exercice 19. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ et le point N tel que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{0}$. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$
   En déduire la nature du quadrilatère $ABNI$

Exercice 20. Soit ABC un triangle.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$
3. Démontrer que les droites (CE) et (FB) sont parallèles.

Exercice 21. Soit PQR un triangle de centre de gravité G. Soient les points I, J et K tels que :

$$\overrightarrow{GI} = -3\overrightarrow{GP}, \qquad \overrightarrow{GJ} = -3\overrightarrow{GQ} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{GK} = -3\overrightarrow{GR}$$

1. Faire une figure
2. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK.

Exercice 22. ABC est un triangle avec $AB = 8$ cm

1. Placer le point E tel que :

   $$3\overrightarrow{EA} + 5\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}$$ *Justifier la position de E à l'aide d'un calcul vectoriel*

2. Démontrer que $3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} = 8\overrightarrow{CE}$

Exercice 23. ABC est un triangle de centre de gravité G. Le point Z est le milieu de $[AC]$.

1. Faire une figure puis placer les points I, J et K définis par $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$
2. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK
3. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BZ}$
4. Démontrer que $BIJG$ est un parallélogramme

Exercice 24. Soit PQR un triangle de centre de gravité G
Soient I le symétrique de G par rapport à P, J celui de G par rapport à Q et K celui de G par rapport à R
Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK

Exercice 25. $ABCD$ est un parallélogramme

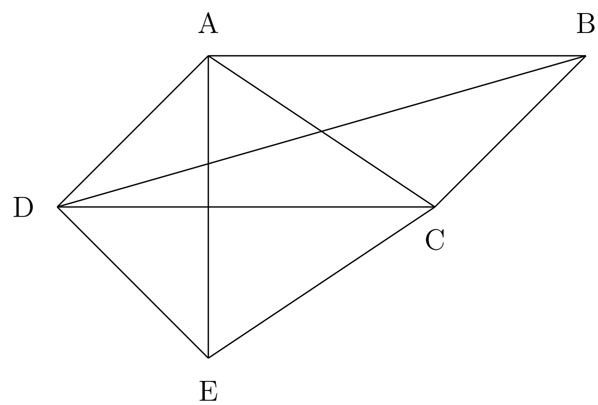
1. Construire les points F et E tels que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$
2. Construire le point G tel que $AEGF$ soit un parallélogramme
3. Démontrer que les points A, C et G sont alignés

Exercice 26. G est le centre de gravité d'un triangle ABC
Démontrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

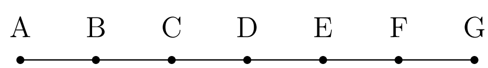
Exercice 27. ABC est un triangle

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
3. Construire le point N tel que $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
4. Démontrer que les points A, M et N sont alignés

Exercice 28. Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme.
Soit G le centre de gravité du triangle AEC
Démontrer que G est le centre de gravité du triangle BDE



Exercice 29. Le segment $[AG]$ est divisé en 6 parties de même longueur. M est un point quelconque du plan



Compléter les relations suivantes par :

1. La lettre qui convient :

   (a) $\overrightarrow{C\ldots}+\overrightarrow{\ldots G}=\overrightarrow{0}$

   (b) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A\ldots}$

2. Le nombre qui convient :

   (a) $\overrightarrow{AD}=\ldots\overrightarrow{GC}$

   (b) $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MG}=\ldots\overrightarrow{ME}$

Exercice 30. $ABCD$ est un parallélogramme.

1. Construire les points E et F définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}=-2\overrightarrow{DA}$
2. Montrer que $\overrightarrow{FE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$
3. En déduire que E, F et C sont alignés.