Exercices : Trigonométrie

Exercice 1. Calculer les longueurs d'arcs de cercle dans les cas suivants :

1. un arc de cercle de rayon 1 et d'angle 10°
2. un arc de cercle de rayon 10 et d'angle 10°
3. un arc de cercle de rayon 1 et d'angle 270°
4. un arc de cercle de rayon 3 et d'angle 45°
5. un arc de cercle de rayon π et d'angle 80°
6. un arc de cercle de rayon 1 et d'angle 120°

Exercice 2. Dans le cercle trigonométrique, convertir en degré les mesures d'angles données en radians :

1. $\dfrac{\pi}{5}$
2. $\dfrac{7\pi}{5}$
3. $\dfrac{5\pi}{3}$
4. 2π
5. $\dfrac{2\pi}{3}$
6. $\dfrac{5\pi}{6}$

Définition 1 :
La mesure d'un angle en radian comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est la mesure principale d'un angle en radian

Exercice 3.

1. On donne des mesures d'angles en radian, déterminer la mesure principale de chacun de ses angles :

   (a) $\dfrac{75\pi}{3}$ (b) $-\dfrac{98\pi}{5}$ (c) $\dfrac{59\pi}{11}$ (d) $-\dfrac{94\pi}{7}$

2. Ecrire un algorithme demandant de saisir une mesure d'angle en radian (i.e un nombre réel quelconque) et donnant la mesure principale de cet angle, puis le progammer.

Exercice 4. Placer sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O et d'origine I les points P, Q, R et S tels que :

1. $\widehat{IOP} = \pi$ rad
2. $\widehat{IOQ} = -\dfrac{\pi}{2}$ rad
3. $\widehat{IOR} = 6\pi$ rad
4. $\widehat{IOS} = \dfrac{7\pi}{6}$ rad

Exercice 5. Déterminer, à l'aide d'un cercle trigonométrique, les sinus et cosinus des nombres réels suivants :

1. $\dfrac{\pi}{2}$
2. $-\dfrac{\pi}{3}$
3. $\dfrac{7\pi}{3}$
4. $\dfrac{\pi}{13}$

Exercice 6. Déterminer les solutions dans $]-\pi;\pi]$ des équations suivantes :

1. $\sin x = 0,5$
2. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos x = -1$
4. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\sin x = 0$

Exercice 7. Calculer le sinus et le cosinus des réels x, y, z, t et u vérifiant les conditions suivantes :

1. $2\cos x = \sqrt{2}$ et $x \in [0;\pi]$
2. $\sin y + 1 = 0$
3. $\cos z = \sin z$ et $z \in [-\pi;0]$
4. $2\sin t = -1$ et t compris entre $-\pi$ et 0
5. $\cos u \times \sin u = 0$ et $u \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 8.

1. Tracer un cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (O,I,J). Soit M tel que $\widehat{IOM} = x$ rad avec $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
2. (a) On appelle N le symétrique de M par rapport à l'axe (OI). Donner en fonction de x, une mesure de l'angle orienté $\widehat{ION}$
   (b) En déduire l'expression de $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$
3. (a) On appelle L le symétrique de M par rapport au point O. Donner, en fonction de x, la mesure orienté de l'angle $\widehat{IOL}$
   (b) En déduire l'expression de $\cos(\pi+x)$ et $\sin(\pi+x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
4. (a) On appelle K le symétrique de M par rapport à l'axe (OJ). Donner, en fonction de x, la mesure orienté de l'angle $\widehat{IOK}$
   (b) En déduire l'expression de $\cos(\pi-x)$ et $\sin(\pi-x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Exercice 9.

1. Rappeler les valeurs exactes de $\sin\dfrac{\pi}{3}$ et $\cos\dfrac{\pi}{3}$.
2. En déduire les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels : $-\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{4\pi}{3}$

Exercice 10.

1. Tracer un cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (O,I,J). Soit M tel que $\widehat{IOM} = x$ rad avec $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
2. (a) On appelle N le symétrique de M par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$. Donner, en fonction de x, la mesure orienté de l'angle $\widehat{ION}$
   (b) En déduire l'expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
3. En déduire l'expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Exercice 11.

1. Sur le cercle trigonométrique, marquer les points associés au réel tel que $\sin x = 0,2$
2. Colorier en rouge l'arc de cercle correspondant aux points tels que $\sin x > 0,2$

Exercice 12.

1. Sur le cercle trigonométrique, marquer les points associés au réel tel que $\cos x = 0,2$
2. Colorier en rouge l'arc de cercle correspondant aux points tels que $\cos x > 0,2$

Exercice 13. On sait que $\sin a < \sin b$. Comparer les réels a et b dans chacun des cas :

1. si a et b sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$
2. si a et b sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π
3. si a et b sont compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$

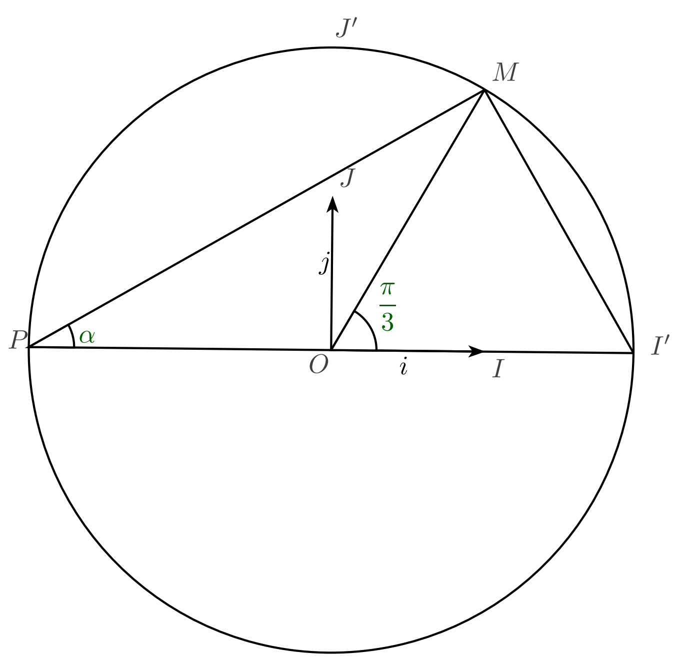
Exercice 14. On considère un repère orthonormé (O, I, J) et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$

1. Placer les points M, N et P de $\mathscr{C}$ tels que :
$$\widehat{IOM} = \frac{\pi}{6} \qquad \widehat{ION} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \qquad \widehat{IOP} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}$$
2. Démontrer que l'aire $\mathscr{A}$ du triangle MNP vaut :
$$\mathscr{A} = \frac{3\pi}{4}$$

Exercice 15. On considère un repère orthonormé (O, I, J) et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$

1. Placer les points M, N, P et Q de $\mathscr{C}$ tels que :
$$\widehat{IOM} = \frac{-41\pi}{3} \qquad \widehat{ION} = \frac{41\pi}{3} \qquad \widehat{IOP} = \frac{-41\pi}{3} + \pi \qquad \widehat{IOQ} = \frac{41\pi}{3} + \pi$$
2. Quelle est l'aire du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 16. Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r. Soit I' le point de $[OI)$ tel que $OI' = r$.
Soit P un point du cercle tel que $[PI']$ en soit un diamètre.
Soit M un point du cercle tel que l'angle $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$ rad.



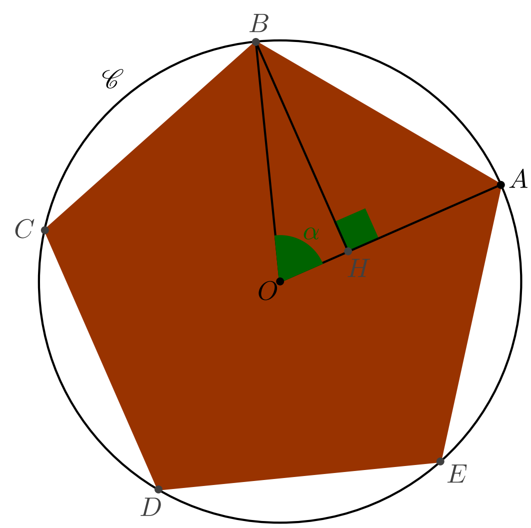
1. Déterminer la nature du triangle $I'OM$, en déduire la mesure de l'angle $\widehat{MI'O}$ ainsi que la longueur du segment $[I'M]$
2. A l'aide du théorème de Pythagore, déterminer PM en fonction de r
3. Déterminer la valeur de $\cos\alpha$.
4. Déterminer α
5. Que vient-on de démontrer ?

<u>Exercice</u> 17. On considère un repère orthonormé (O, I, J).
Soit le point M appartenant au cercle de centre O et de rayon r (où r est un nombre réel strictement positif). L'angle $\widehat{IOM} = \alpha$ rad.

1. Faire une figure
2. La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ en M'. Montrer que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OM'}$
3. Déterminer les coordonnées de M' en fonction de α. En déduire les coordonnées de M en fonction de r et α.
4. Ecrire un algorithme qui demande le rayon r et l'angle α en radian, retourne l'abscisse et l'ordonnée du point M

<u>Exercice</u> 18. Soit un pentagone régulier $ABCDE$ inscrit dans un cercle de rayon r et de centre O.

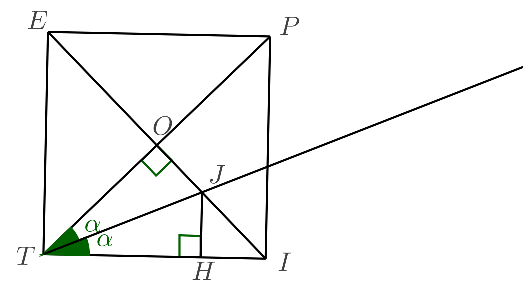
1. Calculer x, mesure en degré de l'angle $\widehat{AOB}$
2. Déterminer α, mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$
3. Sachant que $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ calculer $\sin^2\dfrac{2\pi}{5}$, et en déduire que
$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5}}}{4}$$
4. Montrer que le triangle AOB est isocèle en O.
5. Soit H le pied de la hauteur du triangle AOB passant par B. Calculer BH. En déduire l'aire du triangle AOB en fonction de r
6. En déduire l'aire du pentagone $ABCDE$ en fonction de r



ABCDE est un pentagone régulier

Exercice 19.

Soit le carré PETI de côté a. Ses diagonales se coupent en O. Soit (TJ) la bissectrice de l'angle $\widehat{ITO}$ telle que le point J soit sur le segment $[OI]$. H est le projeté orthogonal de J sur (TI). L'objectif de cet exercice est de trouver les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$



1. Exprimer en fonction de a, la longueur du segment $[TO]$
2. En utilisant dans les triangles JOT et JTH le cosinus de deux angles égaux, montrer que $OT = OH$ et exprimer la longueur du segment $[TH]$ en fonction de a. En déduire HI.
3. Déterminer la nature du triangle IJH et en déduire JH en fonction de a
4. Déterminer la nature du triangle THJ et déduire des questions précédentes les longueurs des 3 côtés de ce triangle.
5. Déduire de la question précédente que :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

6. Vérifier que :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$$

Exercice 20. Soit, dans un repère orthonormé, le point $A(0;5)$ et $M(x;y)$ un point du cercle de centre A et de rayon 5.

1. Démontrer que $x^2 + y^2 - 10y = 0$
2. Trouver les coordonnées des points d'ordonnée 8 qui appartiennent au cercle.
3. Trouver tous les points à coordonnées entières qui appartiennent au cercle.

Exercice 21. On sait que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

1. Vérifier que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2. En déduire $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 22. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{1}{3}$. Déterminer $\cos x$

Exercice 23. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Déterminer $\sin x$

Exercice 24. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$ et $AD = 4$.

1. Démontrer que l'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme est : $\mathscr{A} = 20 \times \sin\widehat{BAD}$
2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ si $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{4}$

3. Pour quelles valeurs en degrés de $\widehat{BAD}$, l'aire du parallélogramme est-elle égale à 10 ?
4. Pour quelle valeur de $\widehat{BAD}$, $\mathscr{A}$ est-elle maximale ? Quelle est dans ce cas la nature du parallélogramme ?

Exercice 25. $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E et F construits sur le cercle $\mathscr{C}$ ci-dessous. Justifier les réponses.