Exercices : Fonction de référence

Exercice 1.

1. Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction carré sur l'intervalle $[-3;3]$, puis celle de la fonction affine $x \longmapsto -x+2$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
3. Développer $(x+2)(x-1)$
4. Retrouver les solutions de la première question par le calcul.

Exercice 2. Soient $A = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $B = \sqrt{7+2\sqrt{15}}$

1. Calculer A^2 et B^2
2. Sans un calcul supplémentaire, comparer A et B. Expliquer.

Exercice 3. x désigne un nombre réel. Dans chaque cas, dire si l'implication est vraie ou fausse. Expliquer pourquoi.

1. $-5 \leq x \leq -2 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 30$
2. $1,37 \leq x \leq 1,42 \Longrightarrow 1,88 \leq x^2 \leq 2,01$
3. $12,5 \leq x \leq 13,2 \Longrightarrow 156,2 \leq x^2 \leq 174,3$
4. $-1 < x < 2 \Longrightarrow 1 < x^2 < 4$

Exercice 4. Que penser des raisonnements suivants ? *Expliquer*

1. L'équation $x^2+1=0$ admet -1 pour solution
2. On sait que $x^2 \geq 4^2$ donc $x \geq 4$
3. On sait que $x \leq 10$ donc $\dfrac{1}{x} \leq 0,1$
4. L'équation $x^2 = 16$ admet 4 pour solution

Trouver des contre-exemples dans chaque cas que vous avez jugés erronées.

Exercice 5. On considère une fonction définie par $f(x) = 3x^2+12x-15$

1. Montrer que $f(x) = 3(x-1)(x+5)$ et $f(x) = 3(x+2)^2-27$
2. Choisir l'expression la mieux adaptée pour calculer les images de -2, 1 et 0 et les calculer
3. Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les antécédents éventuels de 0, -15 et -27
4. -30 a-t-il des antécédents par f ?
5. Dresser le tableau de variations de f. Quel est le minimum de f ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 6. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+3x-4$ et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer les antécédents de -4 par f
2. En déduire par symétrie l'abscisse du sommet de $\mathscr{P}$
3. Calculer alors l'ordonnée de ce sommet.
4. Tracer $\mathscr{P}$

Exercice 7. f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels (*sans laisser de racine au dénominateur*) :

1. -4
2. $0,5$
3. $\dfrac{2}{3}$
4. $-\dfrac{11}{5}$
5. $\sqrt{56}$
6. $-2\sqrt{13}$
7. 10^{41}
8. 8×10^{-4}

Exercice 8. Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\dfrac{1}{-0,012}$ et $\dfrac{1}{-0,099}$
2. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{0,21}$
3. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{-0,21}$
4. $\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

Exercice 9.

1. Soit x un réel tels que $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $-\dfrac{4}{x}$
2. Soit y un réel tels que $-5 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de $\dfrac{10}{y}$
3. Soit z un réel tels que $0 \leq \dfrac{1}{-5x-1}$. Donner un encadrement de x

Exercice 10. Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction inverse :

1. $\dfrac{1}{x} \leq 3$
2. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{4}{3}$
3. $\dfrac{1}{x} > -2$

Exercice 11.

1. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} + 3$$

2. Soient a et b deux réels appartenant à $]-\infty;2[$ tels que $a < b$. Comparer dans l'ordre, en justifiant :
   (a) $a-2$ et $b-2$
   (b) $(a-2)^2$ et $(b-2)^2$
   (c) $\dfrac{1}{(a-2)^2}$ et $\dfrac{1}{(b-2)^2}$
   (d) $\dfrac{-5}{(a-2)^2}$ et $\dfrac{-5}{(b-2)^2}$
   (e) $\dfrac{-5}{(a-2)^2}+3$ et $\dfrac{-5}{(b-2)^2}+3$
3. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty;2[$
4. En suivant la même démarche, trouver le sens de variation de f sur $]2;+\infty[$
5. En déduire le tableau de variations de f

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$ et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
2. Montrer que $f(x) = -2(x-4)(x-2)$
3. Sélectionner dans chaque cas la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes et y répondre.
   (a) En quel point la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?
   (b) En quels points la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Quel est le sens de variation de la fonction f ?
   (d) Quel est le maximum de la fonction ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 13. Soit f la fonction $x \longmapsto -3+\dfrac{1}{x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Si une fonction g peut s'écrire sous la forme $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ on dit que g est une fonction homographique. Démontrer que f est une fonction homographique.
3. Soient a et b deux réels appartenant à $]-1;+\infty[$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$. En déduire le sens de variation de f sur $]-1;+\infty[$.
4. En procédant de même, étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;-1[$.
5. Dresser le tableau de variations de f
6. Dresser le tableau de signes de f