Chapitre 3 : Les Vecteurs du plan

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 28 novembre 2009

Table des matières

Cours : Les Vecteurs du plan

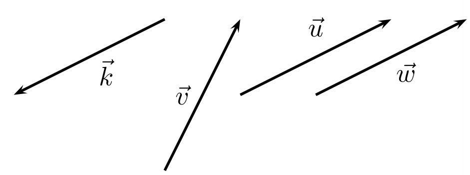
Le mot vecteur vient du latin « vector », dérivé du verbe « vehere », qui signifie transporter. Un vector désigne donc un véhicule, par exemple un chariot. Son point de départ n'a pas d'importance sur sa nature.

1 Les vecteurs du plan

1.1 Caractérisation et normes des vecteurs

Définition 1. Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance, deux déplacements de deux points d'originie distincts peuvent correspondre au même vecteur, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens. Il est donc possible de le faire glisser librement dans le plan, parallèlement à lui-même.

Ci-contre sont représentés dans le plan $\mathscr{P}$ quatre vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont différents car leur direction est différente (elle est portée par deux droites sécantes), les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{k}$ sont différents car leur sens n'est pas le même. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont identiques car ils ont en commun sens, longueur et direction. On dit qu'ils représentent le même vecteur et on peut écrire $\vec{v} = \vec{w}$



Caractérisation d'un vecteur : Un vecteur non nul du plan est caractérisé par :
– Sa direction
– Son sens
– Sa longueur

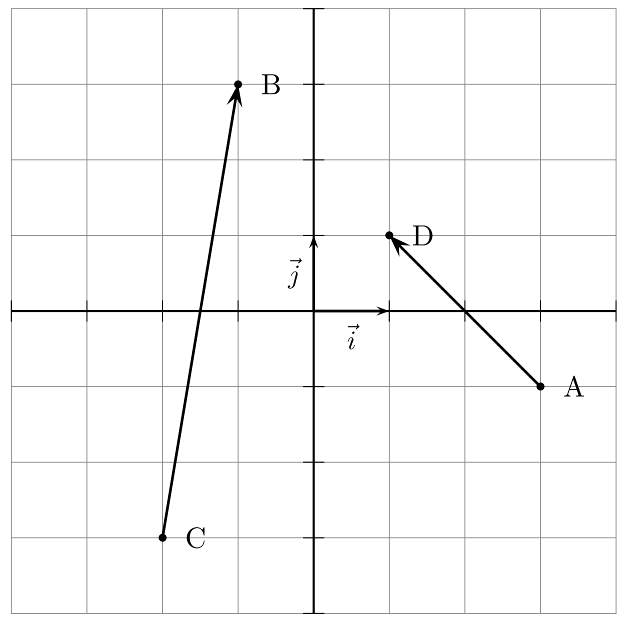
Remarques :
– Un vecteur désigne un déplacement rectiligne, il est indépendant de son point de départ (de son origine)
– Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ son égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$

Définition 2. Il existe un vecteur qui n'a ni direction, ni sens, dont la longueur vaut 0. On l'appelle le vecteur nul et on le note $\overrightarrow{0}$.

<u>Définition</u> 3. La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme. C'est un donc nombre positif ou nul. On le note $||\vec{u}||$. En particulier : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$

<u>Exercice</u> 1.1.

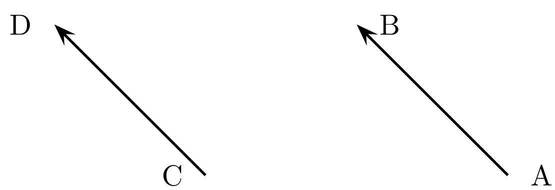
Ci-contre sont représentés deux vecteurs.



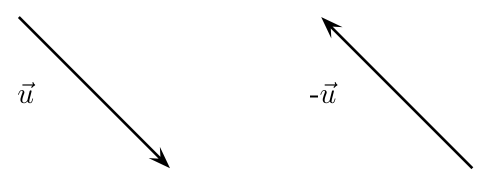
1. Calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{AD}$
2. Calculer la longeur du vecteur $\overrightarrow{CB}$
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD}$
4. Comparer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ et le vecteur $\overrightarrow{DA}$
5. Comparer $\vec{i}$ et $\vec{j}$

1.2 Égalité de deux vecteurs et opposé

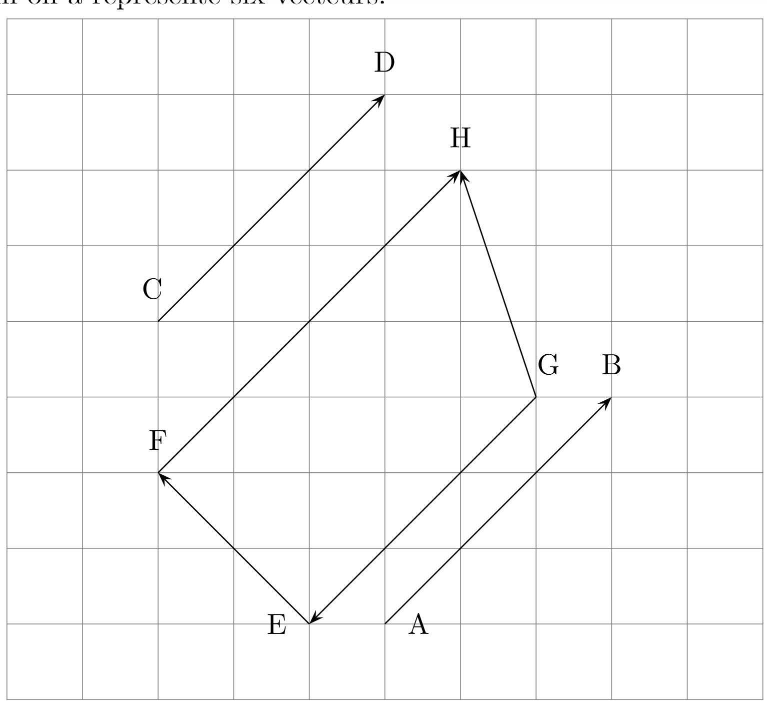
Propriété 1. Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un paralllógramme.



Définition 4. Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont :
– La même direction
– La même norme
– Mais des sens opposés
On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$. Ainsi l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



Exemple : Sur le dessin on a représenté six vecteurs.

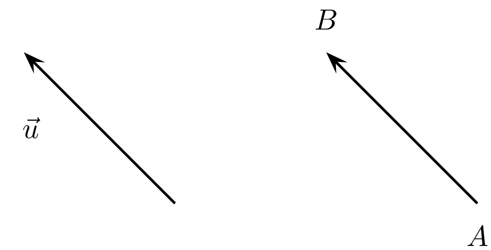


1. Donner les vecteurs égaux, puis les vecteurs opposés.
2. Reproduire chacun des vecteurs avec pour origine le point F

2 Translations de vecteurs $\vec{u}$

2.1 Définition

<u>Définition</u> 5. L'image d'un point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$



2.2 Propriétés

Propriété 2. Par une translation l'image de trois points alignés est trois points alignés

<u>Démonstration</u> :

Soit A, B et C trois points alignés et $\vec{u}$ un vecteur. Notons $t_{\vec{u}}(A) = A'$, $t_{\vec{u}}(B) = B'$ et $t_{\vec{u}}(C) = C'$ les images de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$.
<u>But</u> : Montrer que A', B' et C' sont alignés. Comme $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ on a :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$$

Au final $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.
Pour des raisons identiques, $AA'C'C$ est un parallélogramme.
Par conséquent $(AC)//(A'C')$ et $(AB)//(A'B')$ et donc puisque $(AB) = (AC)$ on a $(A'B')//(A'C')$, ce qui prouve que A', B' et C' sont alignés.

Propriété 3. Par une translation les distances sont conservés

<u>Démonstration</u> :

Soit A et B deux points quelconques du plan, $\vec{u}$ un vecteur, et $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ les images par la translation de vecteurs $\vec{u}$ de ces deux points.
Montrons que $A'B' = AB$
Comme $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ on a :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$$

Au final $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.
Par conséquent $AB = A'B'$

Propriété 4. L'image par une translation d'une droite est une droite parallèle (éventuellement confondue).

Démonstration :

Soit une droite (AB). Montrons que l'image de cette droite par la translation de vecteur $\vec{u}$ est une droite parallèle à (AB).
Notons $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ les images par la translation de vecteurs $\vec{u}$ de A et B. Soit un point C sur (AB), puisque la translation conserve l'alignement $C' \in (A'B')$.
De plus on a $AA'B'B$ qui est un parallélogramme, et donc $(AB)//(A'B')$.
On vient de montrer que :
- $(AB)//(A'B')$
- Tout point de la droite (AB) a son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ sur $(A'B')$

Pour conclure il faut encore montrer que tout point de la droite $(A'B')$ est l'image d'un point de la droite (AB).
Soit $D' \in (A'B')$ et D le point du plan tel que $\overrightarrow{DD'} = \vec{u}$.
Comme $\overrightarrow{DD'} = \vec{u}$ on a : $t_{\vec{u}}(D) = D'$ et $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$, donc $AA'D'D$ est un parallélogramme. De la même manière $BB'D'D$ est un parallélogramme.
Par conséquent $(AD)//(A'D')$ et $(BD)//(B'D')$. Or $(B'D')$ et $(A'D')$ sont les mêmes droites ce qui prouvent donc que $(AD)//(BD)$ i.e que A B et D sont alignés i.e :

$$D \in (AB)$$

Propriété 5. L'image par une translation d'un segment est un segment de même longueur et parallèle.

Démonstration :

On considère un segment $[AB]$ ainsi qu'un vecteur $\vec{u}$. Notons $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ les images par la translation de vecteurs $\vec{u}$ de A et B.
Montrons que $t_{\vec{u}}([AB]) = [A'B']$ puis que $[AB]//[A'B']$.
Comme $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$ on a $\overrightarrow{AA'} = \vec{u} = \overrightarrow{BB'}$ donc $AA'B'B$ est un parallélogramme, ce qui prouve en particulier que $[AB]//[A'B']$.
Il ne reste plus qu'à prouver que l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
Considérons un point $C \in [AB]$ et $C' = t_{\vec{u}}(C)$ son image par la translation de vecteur $\vec{u}$. De nouveau $AA'C'C$ est un parallélogramme contenu dans le parallélogramme $AA'B'B$ donc $C' \in [A'B']$.
Réciproquement si $D \in [A'B']$ montrons alors que $D \in [AB]$ où D vérifie $t_{\vec{u}}(D) = D' \iff \overrightarrow{DD'} = \vec{u}$. De nouveau, $AA'D'D$ est un parallélogramme contenu dans le parallélogramme $AA'B'B$ et donc $D \in [AB]$

Propriété 6. L'image par une translation d'un cercle est un cercle de même rayon.

Démonstration :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit $O' = t_{\vec{u}}(O)$.
Montrons que l'image de $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O' et de rayon r.
Soit $C \in \mathscr{C}$ et $C' = t_{\vec{u}}(C)$, comme la translation conserve les distance on a $OC = O'C' = r$ et donc $C' \in \mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O' et de rayon r, autrement dit on vient de montrer que tout point du cercle $\mathscr{C}$ a son image sur le cercle $\mathscr{C}'$. Montrons enfin que tout point du cercle $\mathscr{C}'$ « provient »bien d'un point du cercle $\mathscr{C}$
Dans ce cas, considérons $A' \in \mathscr{C}'$ alors $O'A' = r$, soit A le point vérifiant $t_{\vec{u}}(A) = A' \iff \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$. Le quadrilatère $OO'A'A$ est un parallélogramme et donc $OA = O'A' = r$ ce qui prouve que $A \in \mathbb{C}$

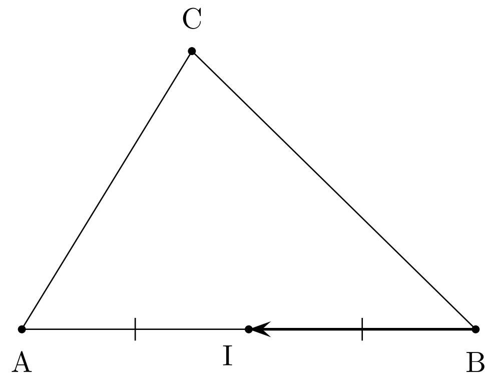
Propriété 7. Par une translation, on conserve les angles.

Démonstration :

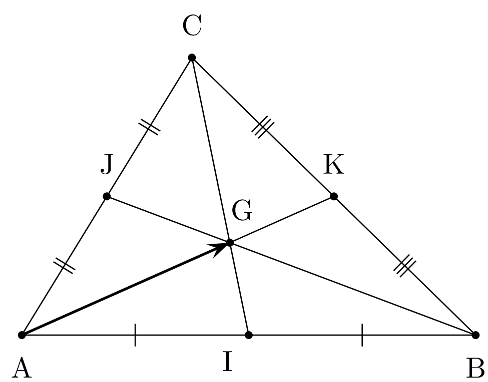
On considére un triangle ABC et un vecteur $\vec{u}$. On note $t_{\vec{u}}(A) = A'$, $t_{\vec{u}}(B) = B'$ et $t_{\vec{u}}(C) = C'$ les images par la translation de vecteur $\vec{u}$ des points A, B et C.
Comme la translation conserve les longueurs et comme l'image d'un segment est un segment parallèle, l'image du triangle ABC est le triangle $A'B'C'$ et les deux triangles sont superposables et chacun des angles des deux triangles sont identiques.

Exercice 2.1.

1. Construire l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$



2. G est le centre de gravité du triangle ABC. Construire l'image de ce triangle par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.



Exercice 2.2. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O, B' et D' sont les images de B et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

1. Construire les points B' et D'
2. Démontrer que le quadrilatère $BDD'B'$ est un parallélogramme
3. Démontrer que $\mathscr{A}(BDD'B') = 2\mathscr{A}(ABCD)$

3 Opérations sur les vecteurs

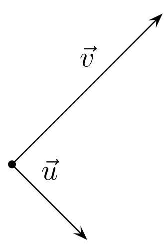
3.1 Ajouter deux vecteurs

Définition 6. La *somme de deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ défini ainsi :
A étant un point quelconque, on place B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$; alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

Relation de Chasles : On a pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

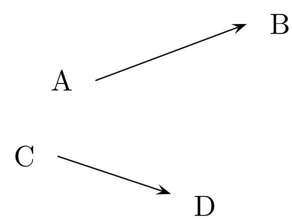
Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+(-\overrightarrow{DB})=\vec{0}$

3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$



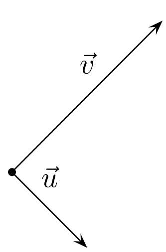
4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

3.2 Soustraire deux vecteurs

Définition 7. La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. On l'obtient en ajoutant à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$.

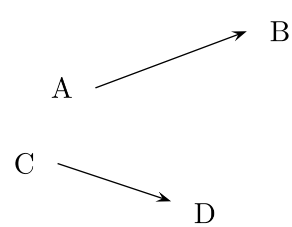
Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})=\vec{0}$

3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

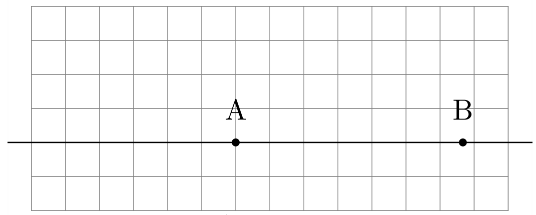


4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$

3.3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

3.3.1 Définition

Activité 3



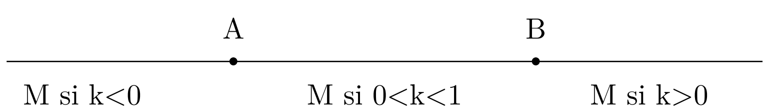
Soient deux points A et B distincts. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$.

1. Placer C le symétrique de A par rapport à B et D le symétrique de C par rapport à A.
   Proposer une expression du vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.
2. Placer les points M_1 et M_2 de la droite (AB) vérifiant $AM_1 = AM_2 = \dfrac{1}{2}AB$
   Proposer une expression des vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.
3. Placer le point E tel que le triangle ABE soit rectangle isocèle en B.
   Exprimer la distance AE en fonction de la distance AB
4. Placer F et G les points distincts de la droite (AB) tels que $AF = AG = AE$ et $F \in [AB)$.
   Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\vec{i}$.
   Peut-on faire de même avec le vecteur $\overrightarrow{AE}$
5. Placer les points H et K tels que $\overrightarrow{EH} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{EK} = -\dfrac{3}{2}\vec{i}$

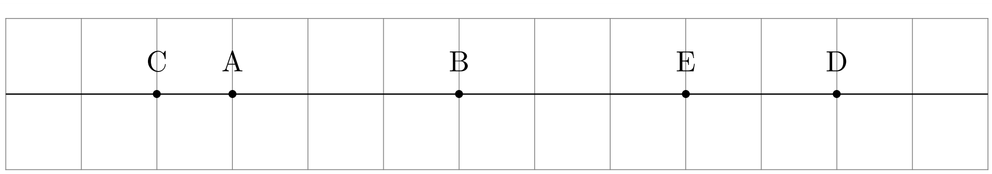
Définition 8. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
Le **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini ainsi :
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.
- Si $k > 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens ; si $k < 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposés
- Si $k > 0$ alors $||k\vec{u}|| = k||\vec{u}||$; si $k < 0$ alors $||k\vec{u}|| = -k||\vec{u}||$, autrement dit $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$

Par convention : $0\vec{u} = \vec{0}$ et $k\vec{0} = \vec{0}$.

Remarque : Soient A et B deux points distincts et k un réel donné. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$ qui se situe sur la droite (AB). Plus précisément : (si $k < 0$; si $0 < k < 1$; si $k > 1$)



Exemples :



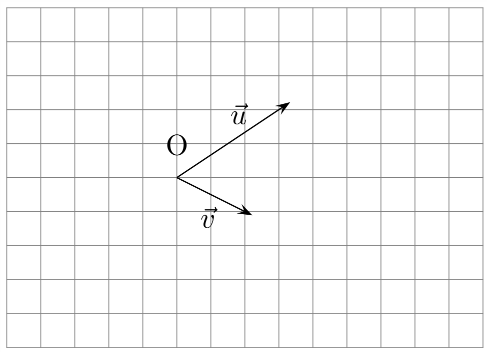
1. Compléter les égalité vectoriels suivantes :

$$\overrightarrow{CD} = \ldots \overrightarrow{AB} \qquad ; \qquad \overrightarrow{BA} = \ldots \overrightarrow{CA} \ldots\ldots$$

2. Placer les points M, N et K vérifiant $\overrightarrow{AM} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

3.3.2 Règles de calcul

Activité 4



1. Construire les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{3}\vec{u} - 2\vec{v}$
2. (a) Construire les points X, Y et Z tels que $\overrightarrow{OX} = -\vec{u} - 2\vec{v}$, $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OZ} = -\dfrac{2}{3}\vec{u}$
   Que constate-t-on ?
   (b) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{OE} = 2.5(\vec{u} + \vec{v})$ et $\overrightarrow{OF} = 2.5\vec{u} + 2.5\vec{v}$
   Que constate-t-on ?
   (c) Construire les points G et H tels que $\overrightarrow{OG} = -2(3\vec{v})$ et $\overrightarrow{OH} = -6\vec{v}$
   Que constate-t-on ?

Propriété 8. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous nombres réels a et b, on a :
- $a(b\vec{u}) = ab\vec{u}$
- $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- $a.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples : $\vec{u}+5.1\vec{u} = 6.1\vec{u}$ $\quad 3(\vec{u}+\vec{v}) = 3\vec{u}+3\vec{v}$ $\quad 2(5\vec{u}) = 10\vec{u}$ $\quad -(4\vec{u}) = (-4)\vec{u} = -4\vec{u}$ $\quad \vec{v} = 4\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \dfrac{1}{4}\vec{v}$

Application 1.
Rappel : Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de la médiane en partant du sommet.
Démontrer la propriété suivante :

Propriété 9. Soit ABC un triangle. Alors le centre de gravité G de ce triangle est l'unique point tel que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Preuve :

- Existence : On a $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ où A' est le milieu du côté $[BC]$. Alors

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

  Soit D le point tel que $ABDC$ soit un parallèlogramme. Alors $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AA'}$. Donc

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\times\frac{-2}{3}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{AA'}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$$

  Donc le point G vérifie bien la relation.
- Unicité : Soit M un autre point tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
  Alors on a

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\vec{0}$$

  car G est le centre de gravité du triangle.
  De plus on sait que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, donc on a $3\overrightarrow{MG}=\vec{0}\iff\overrightarrow{MG}=\vec{0}\iff M=G$. Donc le point G est unique.