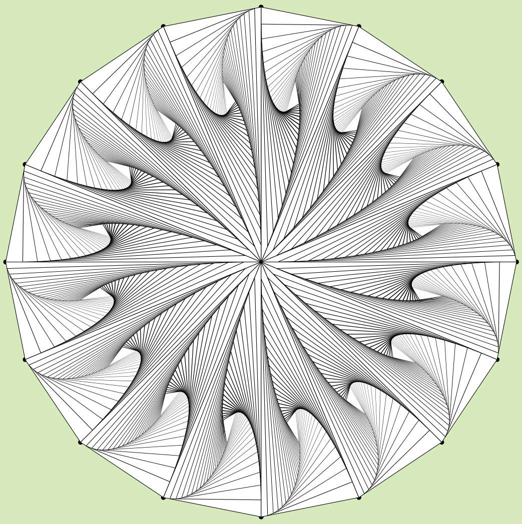
Chapitre 11
Trigonométrie



Hors Sujet

Titre : « Flower Chucker »
Auteur : Banksy
Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.
Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.
Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto »en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.
Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D.Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand

Table des matières

Leçon 11

Le sinus, le cosinus, ... i.e la Trigonométrie

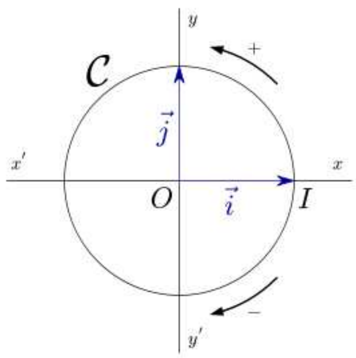
Résumé En classe de collège on a définit le cosinus, le sinus et la tangente dans un triangle rectangle pour des valeurs d'un angle compris entre 0 et 90 degré. Dans ce chapitre on va étendre les définitions vus au collège pour toutes les valeurs des angles, de plus on apprendra par la même une nouvelle unité d'angle : le radian. L'avantage du radian est d'être lié à l'unité de longueur du repère. Autrement dit avec le degré il y avait une unité de longueur pour les segments et une unité de mesure pour les angles, le radian résout ce problème. Par conséquent si il existe une société déveelopper quelques part dans l'univers ou ailleurs ils en viendront, comme nous, à considérer qu'un angle droit mesure $\frac{\pi}{2}$! ! !

I) Le cercle trigonométrique

I-1 Le cercle trigonométrique

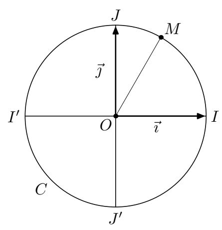
Définition 1 :

Dans un repère orthornomé (O, I, J), on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct : le sens inverse des aiguilles d'un montre



Remarque : Il y a trois manières de repérer un point M sur un cercle :

- Par ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- Par la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$, et le sens de rotation
- Par la mesure de l'arc $\overset{\frown}{IM}$, et le sens de rotation

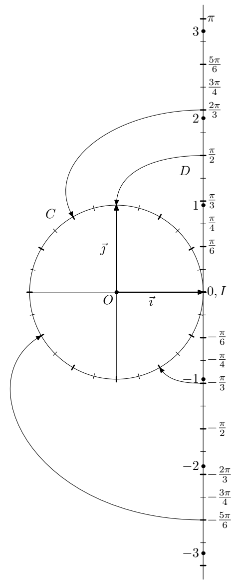


Remarque : Nous allons établir un lien entre ces trois manières de repérer un point sur le cercle trigonométrique.

Remarque : Comme le cercle trigonométrique a pour rayon 1, il a aussi pour périmètre 2π

I-2 Enroulement de la droite des réels

On considère un cercle trigonométrique muni d'un repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, et une droite graduée d tangente au cercle en I. On enroule cette droite autour du cercle.



Propriété 1 :

1. Par ce procédé, à chaque point de la droite, on associe un point, et un seul, du cercle. Par exemple, le point d'abscise $\dfrac{\pi}{2}$ de la droite d correspond au point J du cercle, en effet ce cercle a pour périmètre 2π et donc le quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ a pour longueur $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$
2. En revanche, à chaque point du cercle, on peut associer une infinité de points de la droite car tous les points de d distants d'une longueur de 2π se retrouvent au même endroit sur le cercle. Par exemple, le point J correspond à plusieurs points de la droite d : les points d'abscisses $\dfrac{\pi}{2}-4\pi$; $\dfrac{\pi}{2}-2\pi$; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}+2\pi$; $\dfrac{\pi}{2}+4\pi$; $\dots$, soit tous les points dont l'abscisse s'écrit sous la forme $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ où k est un entier relatif ($k\in\mathbb{Z}$).

Propriété 2 :

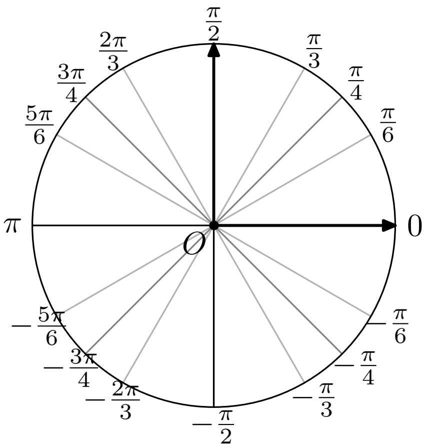
Tout nombre réel x est associé à un point du cercle et tous les réels de la forme $x+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ sont également associés à ce point.

Preuve

Le cercle trigonométrique a pour rayon 1 et donc pour périmètre 2π

I-3 Résumé des valeurs à connaître sur le cercle trigonométrique

On donne ici les valeurs remarquables comprises dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ à savoir placer sur le cercle trigonométrique :



Exercice 1 :

Dans quel quart de cercle se situe le réel 1 ? le réel -1 ?

Exercice 2 :

Donner deux réels associés à chacun des points cardinaux d'un cercle trigonométrique, nommés dans le sens positif I, J, I', J'.

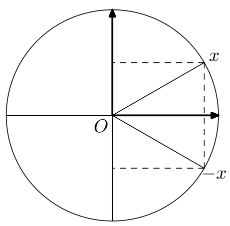
II) Le radian (Il n'est pas obligatoire de traiter cette partie dans le programme)

II-1 Définition

Définition 2 :

Soient I et M deux points d'un cercle trigonométrique de centre O. La mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$ est la mesure orienté de l'arc $\overset{\frown}{IM}$. Le radian est noté « rad ».

Remarque : Pour connaître la mesure orientée d'un arc, il suffit d'enrouler la droite des réels autour du cercle comme fait précédemment. Ainsi des angles de même mesure en degrés mais orientés dans des sens différents auront des mesures opposées en radians.



Propriété 3 :

La mesure d'un arc étant proportionnelle à la valeur de l'angle en degrés, on obtient le tableau de proportionnalité suivant, à savoir retrouver :

Angles en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
Angles en degrés	360	180	90	60	45	30

Exercice 3 :

1. Un angle a pour mesure $150°$. Quelle est sa mesure exacte en radians ?
2. Un angle a pour mesure $\dfrac{3\pi}{10}$ en radians. Quelle est sa mesure en degrés, à 10^{-3} près ?
3. Combien de degrés vaut 1 radian, à 0.1 près ?

II-2 Mesure principale d'un angle en radian

Remarque : Le point d'abscisse $1+2\pi$ de la droite d se retrouve aussi sur le point M', c'est aussi le cas du point d'abscisse $1-2\pi$ ou encore $1+4\pi$ et plus généralement de tous les points d'abscisse $1+2k\pi$ où $k \in \mathbb{R}$. Autrement dit la mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM'}$ vaut :

$$\widehat{IOM'} = 1 \text{ rad} = 1+2\pi \text{ rad} = 1-2\pi \text{ rad} = 1+2k\pi \text{ rad où } k \in \mathbb{R}$$

Un angle en radian admet une infinité de mesure mais une seul qui appartient $\grave{a}$ l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on dit qu'il s'agit de la mesure principale d'un angle en radian

Exemple :

Considérons le point A sur le cercle trigonométrique associé au réel $x = \dfrac{7\pi}{4}$. En plaçant A sur le cercle on peut facilement trouver la mesure principale de l'angle en radian : ici, $\dfrac{7\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 4 :

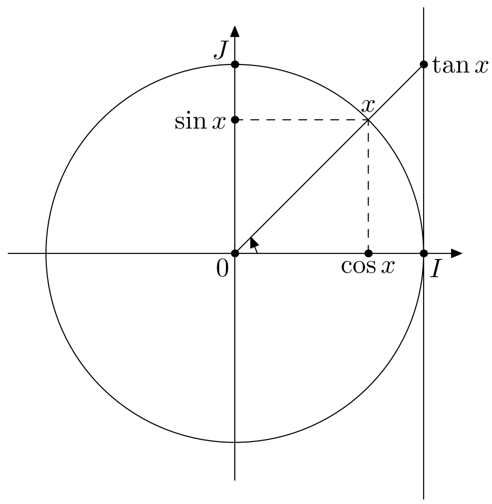
Les réels $\dfrac{7\pi}{5}$ et $-\dfrac{13\pi}{5}$ sont-ils des mesures d'un même angle orienté en radians ?

III) Sinus, cosinus et tangente d'un nombre réel

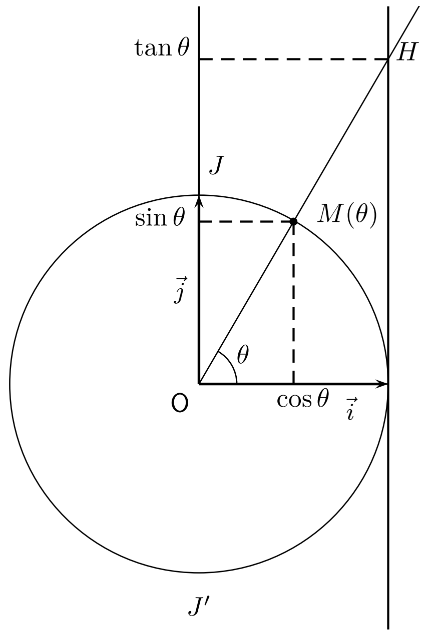
III-1 Définition

Définition 3 :

Soit x un nombre réel et M son point associé sur un cercle trigonométrique muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse du point M dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée du point M dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.



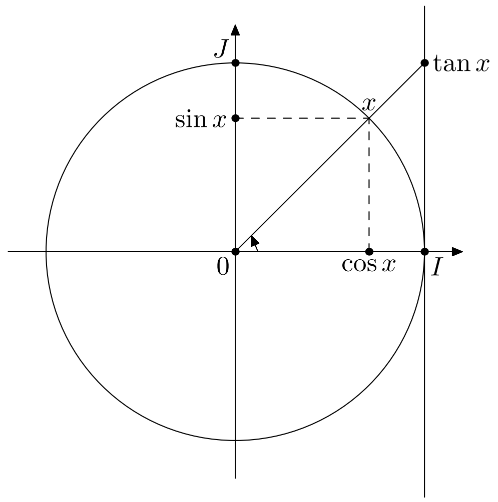
Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et H le point défini par $H = (OM) \cap \Delta$ Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, i.e M n'est ni en J ni en J', autrement dit dès que $\theta \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$.



Définition 4 :

On appelle tangente de θ, noté $\tan\theta$, l'ordonnée du point H dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

III-2 Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle



Dans la figure précédente, notons M le point du cercle trigonométrique associé au réel x, de manière à ce que $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ i.e tel que $\widehat{IOM} = x$ rad soit un angle compris entre $0°$ et $90°$ ou en radian entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ rad. Enfin notons S le projeté orthogonal de M sur (OJ) et C le projeté orthogonal de M sur (OI)
Le triangle COM est alors rectangle en C, par conséquent :

$$\cos x = \frac{adj}{hyp} = \frac{OC}{OM} = OC \qquad \text{et} \qquad \sin x = \frac{opp}{hyp} = \frac{OS}{OM} = OS$$

La nouvelle définition du cosinus et du sinus est donc compatible avec l'ancienne (heureusement...!)

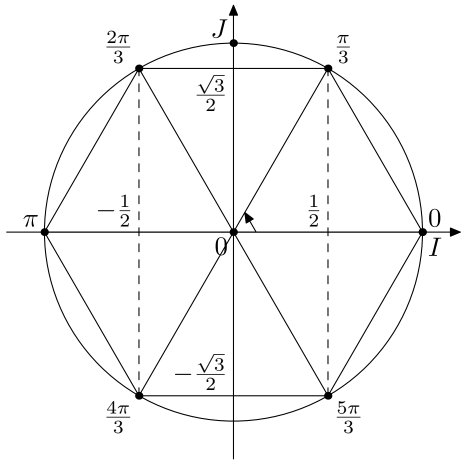
III-3 Valeurs remarquables

Le but de cette partie est de déterminer les valeurs remarquables du sinus et du cosinus pour les angles suivants : $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ et $180°$ i.e pour des angles dont les mesures en radian valent 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et π radian(s).
Dans un premier temps, par lecture du cercle trigonométrique il est clair que :

$$\cos 0 = 1 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \cos \pi = -1$$

De la même manière :

$$\sin 0 = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \sin \pi = 0$$



Sur la figure précédente notons M le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé au réel $\frac{\pi}{3}$. L'angle $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$ rad i.e $60°$, de plus OI et OM sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}$, par conséquent le triangle IOM est un triangle équilatéral. Traçons alors la hauteur issue de M du triangle IOM, elle coupe donc $[OI]$ en son milieu i.e au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
Par conséquent :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$$

Remarque : En utilisant la trigonométrie du triangle rectangle on a aussi $\cos 60° = \frac{adj}{hyp} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

Notons désormais H le projeté orthogonal de M sur (OJ), le triangle OMH est alors rectangle en H et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = OH$
Nous savons déjà que $HM = \frac{1}{2}$ et $OM = 1$, par conséquent d'après le théorème de pythagore :

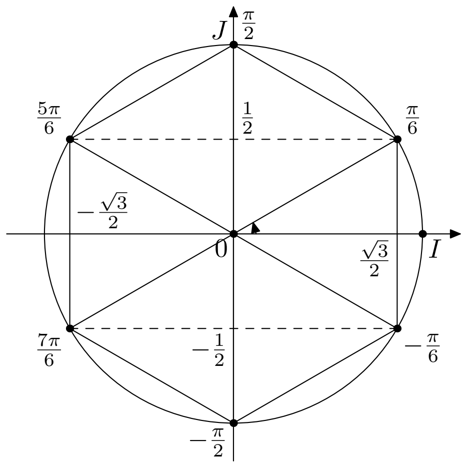
$$OM^2 = HM^2 + HO^2 \iff HO = \sqrt{OM^2 - HM^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On vient de montrer que

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

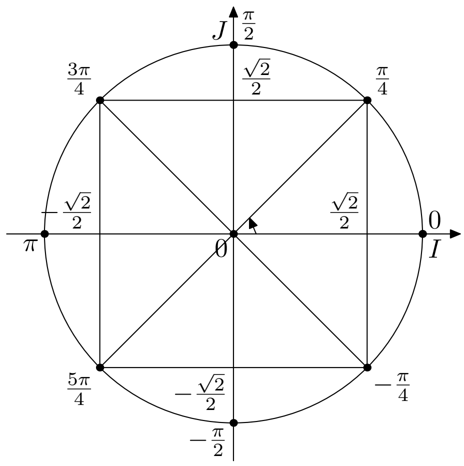
Remarque : Dans le triangle OHM, en utilisant la trigonométrie du triangle rectangle on obtient :

$$\sin 60° = \frac{opp}{hyp} = \frac{OH}{OM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Dans la figure précédente notons M le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé au réel $\dfrac{\pi}{6}$, le triangle OMJ est alors équilatéral. De plus la hauteur issue de M coupe $([OJ]$ en son milieu S et par définition du sinus $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.
On se retrouve dans la même situation que précédemment avec le sinus et le cosinus inversé, par conséquent on a :

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



Sur la figure précédente appelons M le point associé au réel $\dfrac{\pi}{4}$, puis S son projeté orthogonal sur l'axe (OJ) et C son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.
$OCMS$ est alors un carré ce qui prouve dans un premier temps que :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = OC = OS = \sin\frac{\pi}{4}}$$

Il reste à déterminer la longueur OC, pour cela appliquons le théorème de pythagore dans le triangle OCM on a :

$$OM^2 = OC^2 + CM^2 \iff 1 = OC^2 + OS^2 \iff 1 = OC^2 + OC^2 \iff 1 = 2OC^2 \iff OC = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Remarque : En appliquant la trigonométrie du triangle rectangle, dans OCM on retrouve bien entendu ces résultats :

$$\cos 45° = \frac{adj}{hyp} = \frac{OC}{OM} = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le tableau suivant résume tous les résultats que nous venons de démontrer et qu'il faut connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

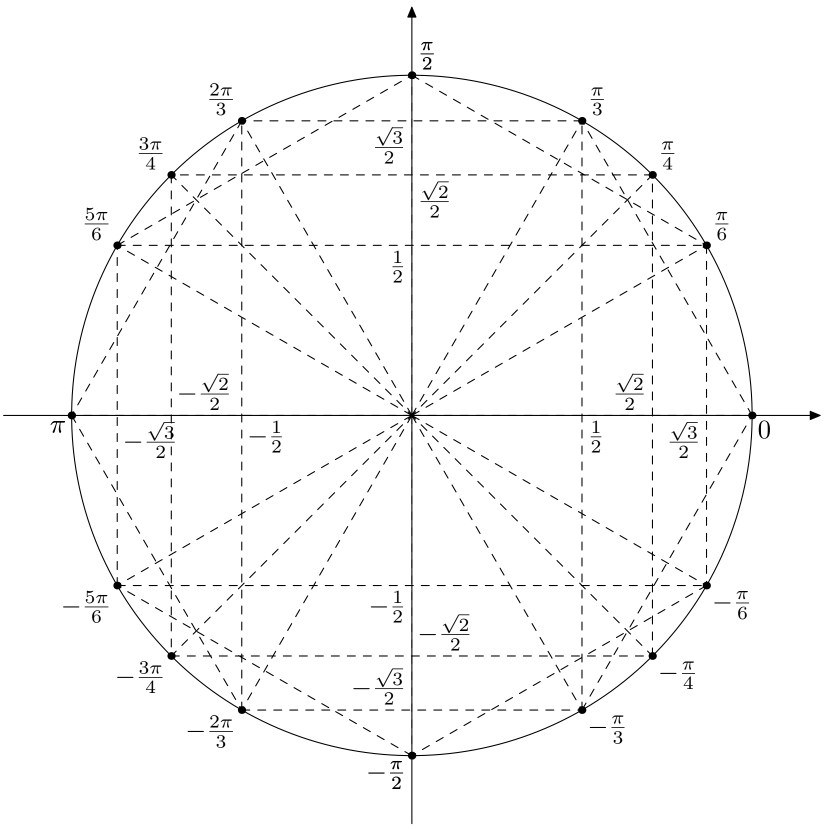
Exercice 1.

1. Donner les valeurs de $\cos(18\pi)$, $\sin\left(\frac{18\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.
2. Simplifier $\cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
3. On donne $\cos(\pi 5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. Déterminer le cosinus et le sinus de $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$.

Exercice 2. Exprimer à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes :

- $A = \cos(x+\pi) - \cos(-x) + 5\cos(x)$
- $B = \sin(\pi - x) + 2\sin(x+2\pi) + \sin(x+3\pi)$
- $C = \sin(\pi + x)\cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)cos(\pi + x)$
- $D = \sin(x + 11\pi) + \sin(11\pi - x) - \cos(11\pi - x)$

III-4 Cercle trigonométrique résumé des valeurs remarquables



III-5 Propriétés élémentaires

Propriété 4 :
Avec les notations de la définition précédente, on a :
– Dans $(O;\vec{i};\vec{j})$, M a pour coordonées $(cos(x);sin(x))$.
– Pour tout réel x on a $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ (Pythagore)
– Pour tout réel x on a $-1\leq\cos(x)\leq 1$ et $-1\leq\sin(x)\leq 1$
– Pour tout réel x on a $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$ où $k\in\mathbb{Z}$

Preuve

1. Il s'agit de la définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.
2. Application directe du théorème de Pythagore (le rayon du cercle trigonométrique vaut 1
3. Une lecture du cercle trigonométrique permet de se convaincre de ce point, comme du suivant.

Exercice 1 **:**

1. Donner les valeurs possibles de $\sin(x)$ lorsque $\cos^2(x)=\dfrac{1}{2}$
2. Encadrer $\sin(3x)$ et $-\dfrac{3}{2}\cos(x)+2$
3. Montrer les deux égalités suivantes pour tout réel x :

$$(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)=-\sin^2(x) \qquad (\cos(x)+\sin(x))^2=1+2\sin(x)\cos(x)$$

Exercice 2 **:**

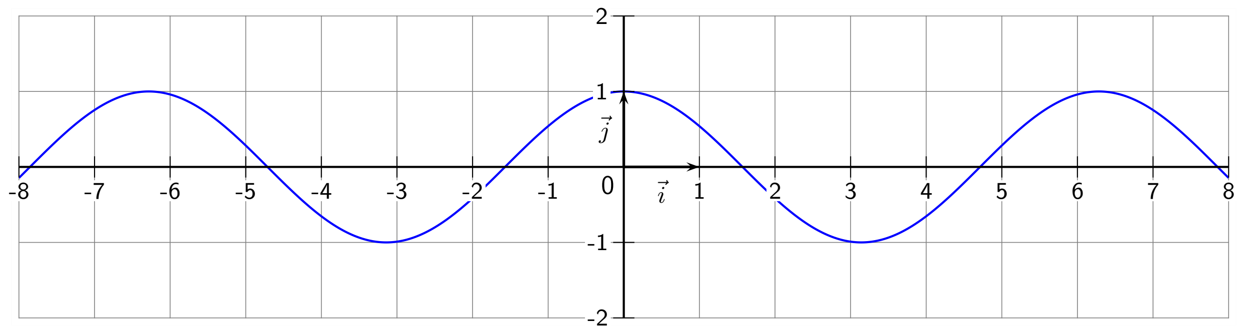
Sachant que $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Calculer $\sin\dfrac{\pi}{12}$, puis montrer que $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

IV) Fonction circulaire (Hors Programme)

Définition 5 :
On appelle fonction cosinus, notée $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
On appelle fonction sinus, notée $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.
On appelle fonction tangente, notée $\tan$, la fonction qui à tout réel x tel que $\cos x\neq 0$ associe $\tan x$

IV-1 Etude de la fonction cosinus

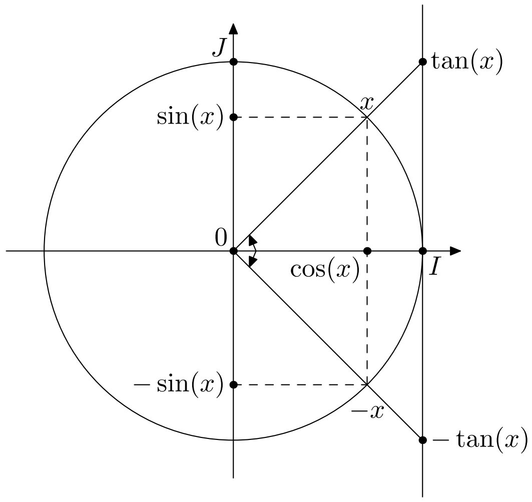
On se limite à l'étude de la fonction cosinus sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
En observant le cercle trigonométrique on voit que la fonction cosinus est strictement croissante sur $]-\pi;0]$ et strictement décroissante sur $[0;\pi]$.
Sa représentation graphique est la suivante :



Remarque : On observe que la représentation graphique de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées i.e on observe que la fonction est paire.

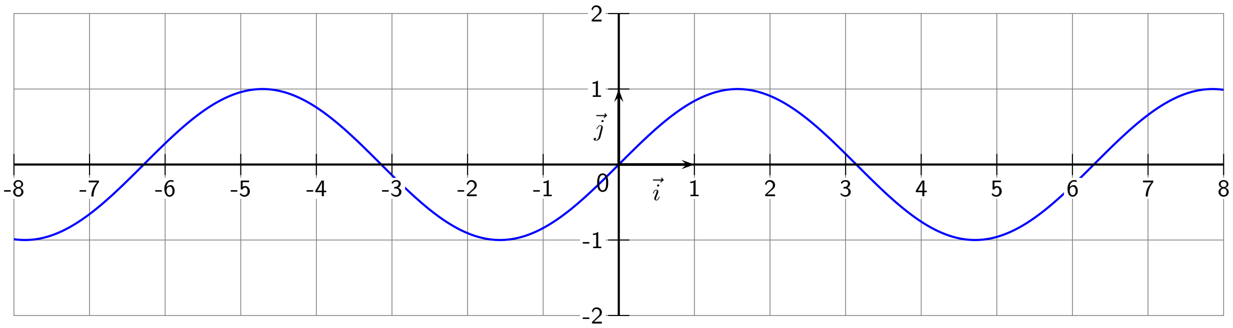
Propriété 5 :
La fonction cosinus est paire.

Preuve



IV-2 Etude de la fonction sinus

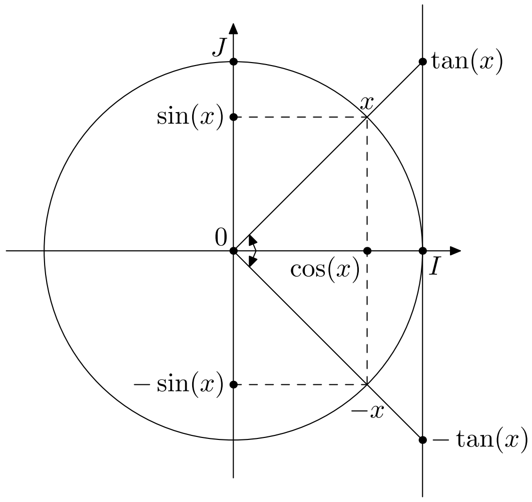
On se limite à l'étude de la fonction sinus sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
En observant le cercle trigonométrique on voit que la fonction sinus est strictement décroissante sur $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
Sa représentation graphique est la suivante :



Remarque : On observe que la représentation graphique de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère i.e on observe que la fonction sinus est impaire.

Propriété 6 :
La fonction sinus est impaire.

Preuve



Remarque : Les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sont des <u>sinusoides</u>

IV-3 Etude de la fonction tangente

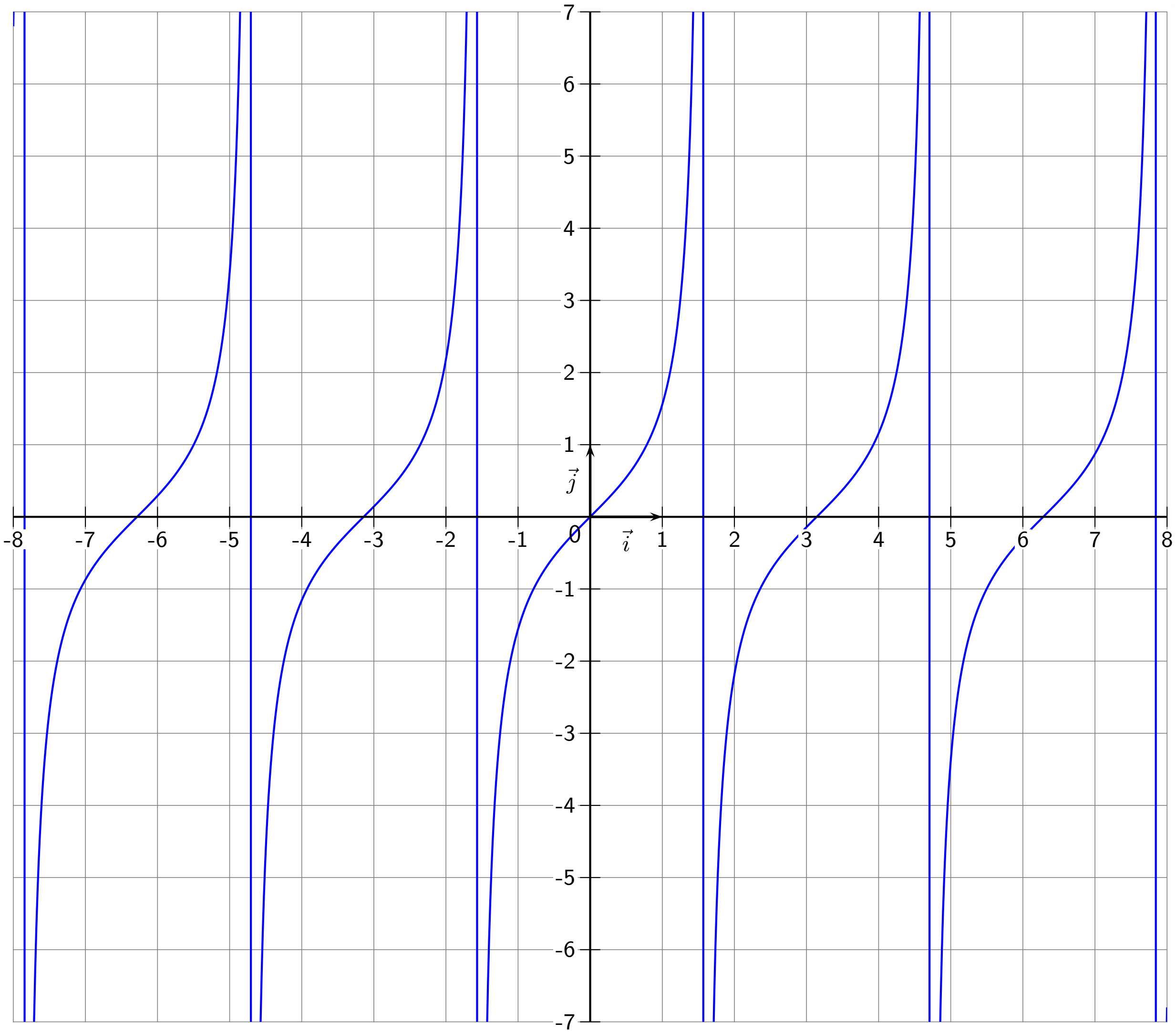
Propriété 7 :
Si $\cos\theta \neq 0$ on a :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Preuve
On applique le théorème de Thales et on obtient directement :

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{1} \Longleftrightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

A titre informatif, sans justification et sans étude préalable voici la courbe de la fonction tangente sur $[-8;8]$



V) Périodicité (Hors Programme)

V-1 Définition

Définition 6 :

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si pour tout réel x on a $f(x+T)=f(x)$.

Conséquences graphiques : Si f a pour période T et que l'on trace sa courbe représentative sur un intervalle de longueur T (par exemple sur $[0;T[$ ou $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right[$) on obtient le reste de la courbe par translation de vecteur $\pm T\vec{i}$. On limitera donc notre étude sur un intervalle de longueur la période.

V-2 Exemples

Propriété 8 :

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

V-3 Applications

Exercice 3. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $g(x) = \cos(2x)$. Montrer que f est périodique de période 4π et trouver la période de g.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien