Chapitre 7 : Probabilités

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 17 mai 2010

Table des matières

Cours : Probabilités

Introduction

Histoire

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent axiomatique) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI ème siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir. La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir. Y aurait-il plusieurs réalités ?

Qu'est ce que le hasard ?

Parmi toutes les définitions possibles, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

- pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII ème siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de 1/6. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale, que nous verrons en classe de première d'équiprobabilité : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
- pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématiques mais une réalité physique. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Qui a raison ? Qui a tort ? Le débat est encore ouvert. Nous pouvons néanmoins réunir deux grands groupes. Ceux qui prônent une étude expérimentale des probabilités à l'aide de la Loi des grands nombres (en gros, la limite des fréquences observées est égale à la probabilité : plus on fait de mesures, plus la fréquence se rapproche de la probabilité).
Inversement, la géométrie du hasard des Laplaciens (1 chance sur 6 d'obtenir chacune des faces d'un dé) repose sur la parfaite symétrie du dé. Mais un dé peut-il être parfaitement symétrique ? Pour le vérifier, il faudrait un grand nombre d'expériences...
Bref, au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent. Mais il faut les avoir en tête : tout n'est pas équiprobable (voir le jeu du passe-dix) et la probabilité ne peut se réduire à la limite des fréquences, ne serait-ce que dans le cas d'une expérience qui ne peut se répéter : quelle est la probabilité de survivre à une guerre nucléaire ? Il semble difficile d'imaginer une série d'expériences pour s'approcher de cette

probabilité...
Mêmes si elles peuvent apparaître antagonistes, ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeter d'un dé) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie. Comme le disait John Stuart Mill : we must remember that the probability of an event is not a quality itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it. Faute de données sures, en économie on estime a priori les probabilités de certains événements élémentaires, puis on utilise ensuite des théorèmes abstraits issus des mathématiques.

Remarque finale !

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectrangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.
Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Kolmogorov, pour enfin les axiomatiser, alors qu'Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

John Louis von Neumann, réaliste...

1 Vocabulaire

1.1 La notion de hasard

Le but de cette partie est de construire un modèle pour décrire les expériences aléatoires. De telles expériences sont par exemple : le numéro obtenu en lançant un dé, la face obtenue en lançant une pièce de monnaie, la carte obtenue en la tirant au hasard d'un jeu, le tirage du loto, etc... Le besoin d'avoir une méthode systématique de description de telles expériences est justifié par le fait que certains résultats qui nous sont parfois intuitivement évidents et que nous n'arrivons pas toujours a expliquer sont en fait faux ! Comme en témoigne l'exercice suivant :
Pensez-vous que dans un groupe de 30 personnes l'on rencontre fréquemment 2 personnes ayant leur anniversaire le même jour ?
Pour avoir au moins une chance sur deux de trouver deux personnes ayant le même anniversaire, combien doit-il y avoir au minimum de personnes dans un groupe ?

Problème :

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elle se trouve 10000 € et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux portes mauvaises, tout en conservant celle choisit par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quels sont ces chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

1.2 Expérience aléatoire, événements

Travail de l'élève : Activités 1 à 4 p 240 de l'hyperbole pour une séance révision.

Définition 1 :

Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat est incertain (mais dont on peut prévoir le type)

Exemple :

Le lancé de dé ou le lancé d'une pièce de monnaie sont des expériences dont l'issue est incertaine.

Définition 2 :

– Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** ou **issue**
– L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**
– Un sous ensemble de l'univers est appelé **événement**, c'est un ensemble constitué d'éventualités de l'univers.

Remarque : En classe de seconde l'ensemble Ω sera presque toujours un ensemble fini.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$
On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{P, F\}$
On effectue la même expérience que précédemment en lançant deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$
Soit A l'événement « Obtenir au moins une fois pile »et B celui « Obtenir au plus une fois Pile ».
Alors $A = \{PP; PF; FP\}$ et $B = \{PF; FP; FF\}$.

Remarque : une même expérience peut déboucher sur deux univers différents suivant les hypothèses faites. Par exemple on lance deux dés et suivant si l'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenues, on obtient :

$$\Omega_p = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36\}$$

$$\Omega_s = \{2; 3; 4; 5; 6; 7.8; 9; 10; 11; 12\}$$

1.3 Introduction à la théorie des ensembles

Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles (finis, infinis dénombrables, infinis non dénombrables). Le but de ce chapitre n'est pas de faire une étude complète de la théorie des ensembles (trop complexe) mais de proposer une approche intuitives des notions les plus utilisées de cette théorie.
Ainsi, nous ne tenterons pas de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble, disons simplement qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objet distincts possédant un certains nombre de propriété commune (par exemple l'ensemble des nombres entiers naturels multiple de 2, ou encore l'ensemble des polynômes de degré 2, ...). On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel (on ne fera pas la différence entre :$\{1, 2\}$ et $\{2, 1\}$. Un ensemble se note avec des accolades, par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 alors :

$$E = \{0; 2; 4; 6; 8\}$$

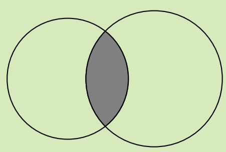
On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble :

$$2 \in E \qquad \text{et } 3 \notin E$$

Enfin nous noterons $\emptyset$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

Définition 3 :

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On note cet ensemble $A \cap B$
Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux ensembles disjoints.



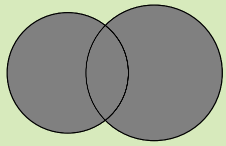
Exemples :

Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$ alors $A \cap B = \{2; 4; 6\}$
Si $A =$« Tirer un roi » et $B =$ « Tirer un coeur » alors $A \cap B =$« Tirer le roi de coeur »

Remarque : $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ et $e \in B$

Définition 4 :

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On le note $A \cup B$.



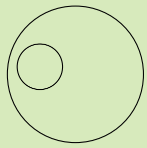
Exemples :

Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$ alors $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$
Si $A =$« Tirer un roi » et $B =$ « Tirer un coeur » alors $A \cup B =$« Tirer un coeur ou un roi de trèfle, pique ou carreau »

Remarque : $e \in A \cap B$ signifie´ $e \in A$ ou $e \in B$ ˇ

Définition 5 :

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note : $A \subset B$.
On dit alors que A est une « partie »de B ou que A est un « sous-ensemble »de B.



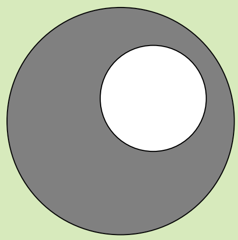
Exemples :

Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $B = \{0; 2\}$ alors $B \subset A$.
Si $A =$« Tirer un roi » et $B =$ « Tirer une figure » alors $A \subset B$

Remarque : De plus on a toujours $A \subset A$, $\emptyset \subset A$, $A \subset (A \cup B)$ et $(A \cap B) \subset A$

Définition 6 :

Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω. Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On le note :
$\Omega - A$ ou $\bar{A}$ ou encore ${}^{C}A$



Exemples :

Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ alors $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$
Si $A =$« Tirer un coeur » alors $\bar{A} =$« Tirer un pique, carreau ou trèfle »

Remarque : De plus on a $A \cup \bar{A} = \Omega$, mais aussi $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Définition 7 :

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E. Ce nombre est noté Card E.
On convient que Card $(\emptyset) = 0$.

Exemple :

Si $E = \{0; 1; 2\}$, alors Card $E = 3$

Remarque : La notion de cardinal ne s'étend pas aux ensembles infinis, tel $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$

Exercice 1 :
On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'interesse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Décrire les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Décrire les événements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $C \cap B$; $C \cup B$; $\bar{A}$; $\bar{A} \cup C$; $\bar{A} \cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraire l'un de l'autre.

Exemple :
On lance deux dés et l'on considère la somme obtenue. Le tableau ci-dessous résume le vocabulaire relatif aux événements et le vocabulaire ensembliste

Vocabulaire	**Signification**	**Illustration**
L'univers Ω (Evénement **certain**)	L'ensemble des éventualités	$\Omega = \ldots$
L'ensemble vide $\emptyset$ (Evénement **impossible**)	L'ensemble qui ne contient aucune éventualité	« Obtenir …… »
Éventualité ou **Issue**	L'un des résultats de l'expérience	« Obtenir 7 » : $\omega = \ldots$
Événement	Sous-ensemble de l'univers	$A =$« Obtenir un nombre pair » $A = \ldots$ $B =$« Obtenir une somme inférieure à 4 » $B = \ldots$
Événement A **et** B $A \cap B$	Événement constitué des issues communes aux deux événements A et B	$A \cap B =$« … $A \cap B = \{\ldots$
Événement A **ou** B $A \cup B$	Événement constitué de toutes les issues qui sont soit dans A, soit dans B, voire les deux	$A \cup B =$« … $A \cup B = \{\ldots$
Événement **incompatibles** ou **disjoints**, (on note $A \cap B = \emptyset$)	Ce sont des événements qui n'ont aucunes issues en commun	$\ldots \quad = \emptyset$
Événement **contraire** Le contraire de A se note $\bar{A}$	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme l'univers $\bar{A}$ contient tous les éléments de l'univers sauf ceux de A	$\bar{A} = \ldots$ $A \cap \bar{A} = \ldots$ $A \cup \bar{A} = \ldots$

2 Probabilités (discrètes)

2.1 Loi de probabilités

Définition 8 :
On considère une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ (Card $\Omega = n$).
Définir une loi de probabilité P sur Ω c'est associer à chaque éventualité ω_i un nombre $p_i \in [0;1]$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Remarque : Les nombres p_i sont les probabilités des événements élémentaires ω_i

Exemple *:*
Dans un verger, on trouve deux fois plus de pommiers donnant des pommes Rouge et que de pommiers donnant des pommes vertes (et c'est tout).
On cherche la probabilité de choisir un pommier donnant des pommes Rouge.
Appelons $P(R)$ cette probabilité et $P(V)$ celle de choisir un pommier donnant des pommes vertes.
Alors on sait que $P(R) = 2P(V)$. De plus $P(R) + P(V) = 1$.
On a donc $2P(V) + P(V) = 1 \iff 3P(V) = 1 \iff P(V) = \dfrac{1}{3}$ et $P(R) = \dfrac{2}{3}$.

Définition 9 :
La probabilité $P(E)$ d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarque : Par convention, on pose $P(\emptyset) = 0$

Exemple *:*
On lance deux fois une pièce équilibrée. L'univers Ω est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$ et chaque éventualité a la même probabilité $\dfrac{1}{4}$.
La probabilité de l'événement A « obtenir Pile et Face »$= \{PF; FP\}$ est donc $P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

<u>Exercice 2</u> *:*
Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont donnés par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	?

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement $A =$« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement $B =$« obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement $C =$ « obtenir un nombre pair ».

2.2 Loi équiprobable, équiprobabilité

Définition 10 :
Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a <u>équiprobabilité</u> ou que la loi de probabilité est <u>équirépartie</u>.

Propriété 1 :
Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables}}{\text{nombre d'éventualités possibles}} = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$$

Exemple :

Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer le valet de coeur est $\frac{1}{32}$.

Celle de tirer un valet est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Celle de tirer un coeur est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

<u>Exercice 3</u> :
Pour chacune des expériences, calculer la probabilité de l'événement demandée.

1. Lancer de deux dés cubiques parfaits. On note a le numéro apparu sur l'un des dés et b le numéro apparu sur l'autre. Quelle est la probabilité de l'événement B « obtenir $a+b<4$ » ?
2. Dans une urne contenant 100 jetons numérotés de 0 à 99, on tire 2 jetons successivement et avec remise. On note le couple de numéros ainsi obtenu $(a;b)$ où a désigne le numéro du premier jeton et b celui du deuxième. Quelle est la probabilité de l'événement C « les deux jetons portent des numéros pairs »

2.3 Quelques propriétés

Propriété 2 :
Si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

<u>Preuve</u> :
Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente.
Dans le cas contraire, $P(A)$ est la somme des probabilités des éléments de A et $P(B)$ est la somme des probabilités des éléments de B. Puisque A et B sont disjoints, $A \cup B$ contient exactement tous les éléments de A et tous ceux de B. Par conséquent $P(A)+P(B)$ est égal à la somme des probabilités des élements de $A \cup B$, i.e $P(A \cup B)$

Corollaire 1 :
- La probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$ de A est $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

***Preuve* :**

– On a $\bar{A} \cup A = \Omega$ et $\bar{A} \cap A = \emptyset$, par conséquent d'après la propriété précédente :

$$1 = P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \Longleftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

– Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B - A)$, où $B - A$ est l'ensemble des éventualités de B qui ne sont pas dans A. On a aussi $A \cap (B - A) = \emptyset$, par conséquent d'après la propriété précédente :

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Théorème 1 :

La propriété de la réunion de deux événements A et B est :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

***Preuve* :**

Il suffit d'écrire que : $A \cup B = (A - B) \cup B$ et comme $(A - B) \cup B = \emptyset$, il vient :

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

***Exercice 4* :**

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 3 boules vertes. On tire une boule au hasard. Calculer les probabilités des événements R, N et B et leur contraire. une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 3 boules vertes. On tire une boule au hasard.

1. Calculer les probabilités des événements R, N, V, et leur contraire.
2. Calculer $P(R \cup V)$

***Exercice 5* :**

Le jeu de 32 cartes. On en choisit une au hasard. On note :
R l'événement « tirer un roi »
T l'événement « tirer un trèfle »

– Décrire en français l'événement $R \cap T$
– Calculer $P(R)$; $P(T)$; $P(R \cap T)$; $P(R \cup T)$

***Exercice 6* :**

Dans une famille de cinq enfants, quelle est la probabilité qu'il y ait plus de filles que de garçons ?
Notons : F l'événement « il y a plus de filles que de garçons »
et G l'événement « il y a plus de garçons que de filles ».

***Exercice 7* :**

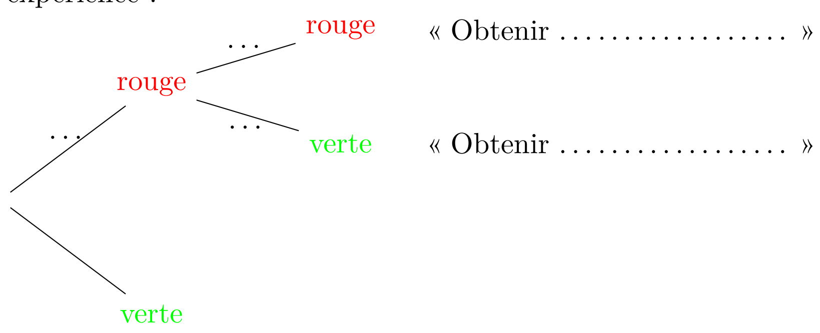
Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

3 Arbres de probabilité

Travail de l'élève : Une urne contient 8 boules, 3 rouges et 5 vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant (branches et probabilités correspondantes), qui modélise l'expérience :



2. Calculer les probabilité des événements suivants :
   - A = « Tirer deux boules rouges »
   - B = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
   - C = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
   - D = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage »
   - E = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
   - F = « Tirer deux boules de la même couleur »
   - G = « Tirer au moins une boule vertes ?

Propriété 3 :
Règle 1 : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2 : La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.
Cela correspond à la probabilité de l'intersection des événements qui le composent.
Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

Exercice 8 :

1. On lance un dé. Si le résultat est pair on tire un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3). Quelle est la probabilité que la somme dé et du jeton éventuel soit égale à 5 ?
2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire des boules de l'urne (sans remise) jusqu'à obtention d'une boule rouge. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
3. Le lièvre et la tortue : on lance un dé. Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant en suivant les cases ci-dessous. Quelle est la situation la plus enviable : celle du lièvre ou de la tortue ?

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien