Chapitre 6 : Fonctions de référence et associées

C. Aupérin D. Zancanaro

2009-2010

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* » Thurston Moore

Dernière modification : 8 mars 2010

Table des matières

Cours : Fonctions de référence et associées

Profiter de ce chapitre pour parler de l'ordre et insister sur les implications et équivalences.

1 $\mathbb{R}$: un ensemble totalement ordonné

Travail de l'élève :

1. Charlotte et David jouent à « who's the biggest brain »sur Facebook. Charlotte est pour l'instant en tête. Donner si possible le vainqueur dans les cas suivant :
   – S'ils gagnent chacun autant de points dans une partie qui suit
   – S'ils perdent autant de points chacun
   – Si Charlotte gagne plus de points que David
   – si Charlotte gagne moins de points que David
2. Soient a et b deux nombres tels que $a < b$.
   (a) Comparer alors les nombres :
      i. $a + 354$ et $b + 354$
      ii. $a - 84354$ et $b - 84354$
      iii. $45a$ et $45b$
      iv. $-2a$ et $-2b$
      v. $\frac{a}{3}$ et $\frac{b}{3}$
      vi. $-\frac{a}{3}$ et $-\frac{b}{3}$

   (b) Trouver un exemple pour a et b tel qu'on ait $a^2 < b^2$ et un tel qu'on ait $a^2 > b^2$
   (c) Trouver un exemple pour a et b tel qu'on ait $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ et un tel qu'on ait $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Dans toutes cette partie, a, b, c et d désignent des nombres réels.
Tous les résultats énoncés ici avec des inégalités strictes restent valables (sauf indication contraire) avec des inégalités larges.

1.1 Equilibre et addition

Propriété 1 : *Le principe de la balance*
L'ordre est inchangé si :
– On ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux membres d'une inégalité.
– On ajoute deux à deux les membres d'inégalités de même sens.

Remarque : En fait on a :

$$\begin{array}{cc} & a < b \\ \overset{+c}{\iff} & a + c < b + c \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & a < b \\ \overset{-c}{\iff} & a - c < b - c \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & a < b \\ + & c < d \\ \hline \implies & a + c < b + d \end{array}$$

La « simple »flèche est une **implication** (la réciproque est fausse)

Exemples :

$$\begin{array}{rc} & 2 < x - 5 \\ \overset{+5}{\iff} & 2 + 5 < x - 5 + 5 \\ \iff & 7 < x \end{array} \qquad \begin{array}{rc} & y + 36 < -3 \\ \overset{-36}{\iff} & y + 36 - 36 \leq -3 - 36 \\ \iff & y \leq -39 \end{array} \qquad \begin{array}{rc} & x < 3 \\ + & y \leq -2 \\ \hline \implies & x + y < 3 + (-2) \\ \iff & x + y < 1 \end{array}$$

Application :
Dans un autre jeu, voici les points accumulés par Charlotte et David :

$$\underbrace{48\,;\,-8\,;\,21\,;\,\frac{15}{7}}_{\text{David}} \qquad \underbrace{21\,;\,-14\,;\,\frac{7}{6}\,;\,x}_{\text{Charlotte}}$$

David a encore perdu mais il ne se rappelle plus le dernier score x de Charlotte. Il cherche à retrouver ce score.
- Est-ce possible ?
- Trouver le plus d'informations possible sur son score

Exercice 1 :
Résoudre l'inéquation $x - 4 > 2$. Représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exercice 2 :
Soient x et y tels que $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y < 2$. Encadrer $x + y$.

Exercice 3 :
Soient x et y deux réels.

1. On considère l'algorithme suivant :
   - Entrée : Saisir x et y
   - Traitement :
     - a prend la valeur $(x+y)^2$
     - b prend la valeur (x^2+y^2)
   - Sortie : Afficher $a - b$

   (a) Qu'affiche la machine pour $x = 3$ et $y = 4$? $x = 3$ et $x = -4$? $x = -3$ et $y = -4$?

   (b) Conjecturer le signe $a - b$ suivant les signes de x et y.

   (c) En déduire la comparaison de a et b suivant les signes de x et y.

2. Développer et réduire $(x+y)^2 - (x^2+y^2)$
3. En déduire la comparaison du carré de la somme de deux réels avec la somme de leurs carrés

1.2 Equilibre et multiplication

Propriété 2 :
L'ordre est inchangé si :
– On multiplie (ou divise) par un même nombre **positif** les deux membres d'une inégalité.
– On multiplie deux à deux les membres d'inégalités de même sens portant sur des nombres **positifs**.
Par contre, l'ordre est inversé si on multiplie par un même nombre **négatif** les deux membres d'une inégalité.

Remarque : En fait on a :

$$\begin{array}{ll} & a<b \\ \overset{\times c>0}{\iff} & ac<bc \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & a<b \\ \overset{\times c<0}{\iff} & ac>bc \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 0<a<b \\ \times & 0<c<d \\ \hline \implies & 0<ac<bd \end{array}$$

Exemples :

1. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$. Encadrer $3x - 2y$.
   On n'a pas de règle pour soustraire des inégalités, on utilisera donc le fait que $3x-2y = 3x+(-2y)$.

$$\begin{array}{ll} & 2 \leq x \leq 3 \\ \overset{\times 3>0}{\iff} & 6 \leq 3x \leq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & -1 \leq y < 2 \\ \overset{\times(-2)<0}{\iff} & 2 \geq -2y > -4 \\ \iff & -4 < -2y \leq 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 6 \leq 3x \leq 9 \\ + & -4 < -2y \leq 2 \\ \hline \implies & 2 < 3x-2y \leq 11 \end{array}$$

2. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y < 4$. Encadrer $\dfrac{xy}{2}$.
   On remarquera que diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

$$\begin{array}{lll} & 0< & 2 \leq x \leq 3 \\ \times & 0< & 1 \leq y < 4 \\ \hline \implies & 0< & 2 < xy < 12 \\ \overset{\times\frac{1}{2}>0}{\iff} & 0< & 1 < \dfrac{xy}{2} < 6 \end{array}$$

3. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq -1$. Encadrer xy.
   On a une inégalité portant sur des négatifs. On doit donc la transformer avant de pouvoir multiplier les inégalités.

$$\begin{array}{ll} & -5 \leq y \leq -1 \\ \overset{\times(-1)<0}{\iff} & 5 \geq -y \geq 1 \\ \iff & 1 \leq -y \leq 5 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & 0< & 2 \leq x \leq 3 \\ \times & 0< & 1 \leq -y \leq 5 \\ \hline \implies & 0< & 2 \leq -xy \leq 15 \\ \overset{\times(-1)<0}{\iff} & 0> & -2 \geq xy \geq -15 \\ \iff & & -15 \leq xy \leq -2 < 0 \end{array}$$

4. Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq 1$. Encadrer xy.
   On a une inégalité portant sur des positifs et des négatifs. On va donc commencer par la scinder en

deux et traiter les deux cas séparément, puis conclure.

$$\begin{array}{cc} & -5 \leq y \leq 0 \\ \overset{\times(-1)>0}{\Longleftrightarrow} & 5 \geq -y \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq -y \leq 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & 2 \leq x \leq 3 \\ \times & 0 \leq -y \leq 5 \\ \hline \Longrightarrow & 0 \leq -xy \leq 15 \\ \overset{\times(-1)>0}{\Longleftrightarrow} & 0 \geq xy \geq -15 \\ \Longleftrightarrow & -15 \leq xy \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & 2 \leq x \leq 3 \\ \times & 0 \leq y \leq 1 \\ \hline \Longrightarrow & 0 \leq xy \leq 3 \end{array}$$

Finalement on a : $-15 \leq xy \leq 0$ ou $0 \leq xy \leq 3$, donc dans tous les cas on a $-15 \leq xy \leq 3$.

Attention !

On remarque dans les deux derniers cas, qu'il ne suffit pas de multiplier les bornes de l'encadrement entre elles !

2 Etude de fonctions de référence

2.1 Fonctions affines

2.1.1 Définition

Définition 1 :

Soient a et b deux réels.

On appelle fonction affine toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $f(x) = ax+b$.

Propriété 3 :

L'expression algébrique d'une fonction affine ne comporte ni quotient, ni racine.

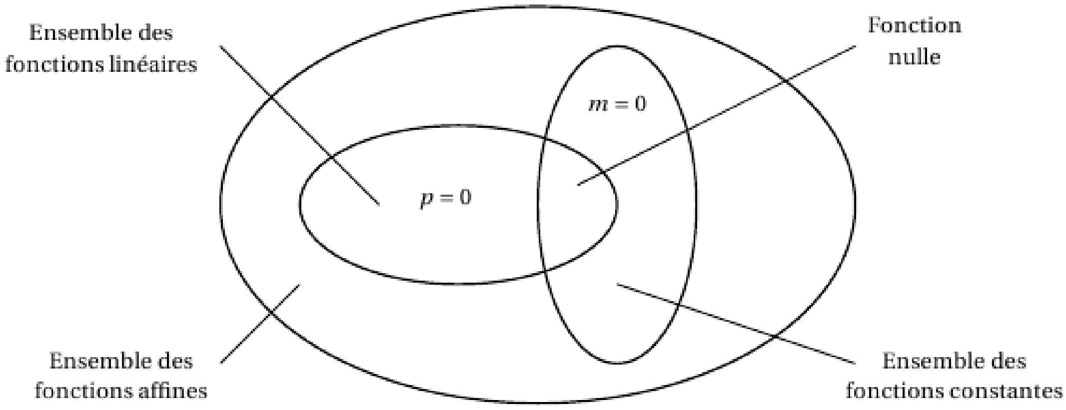
Son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$.

Exemples *:*

Les fonctions $f : x \mapsto 3x+2$, $g : x \mapsto -\pi x + \frac{2}{3}$, $h : x \mapsto x$ et $k : x \mapsto 3$ sont affines.

Les fonctions $l : x \mapsto 3x^2+2$ et $m : x \mapsto \frac{3}{x}+2$ ne le sont pas.

La famille des fonctions affines contient donc celles des fonctions constantes ($a = 0$) et des fonctions linéaires ($b = 0$). On peut représenter la situation par un diagramme "en patate" :



Exemple *:*

Trouver la fonction affine telle que $f(1) = 2$ et $f(-2) = -1$.

f est une fonction affine ce qui équivaut à dire qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$. On a :

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1 + b = 2 \\ -2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ -2a + (2-a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ -3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 2$ et $f(-2) = -1$ est $f : x \mapsto x+1$

Exercice 4 *:*

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = 9$ et $f(3) = -11$.

2.1.2 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 4 :
Soit f la fonction affinie définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

1. Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
3. Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

***Preuve* :**
Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On cherche à savoir si $f(x) = ax + b$ et $f(y) = ay + b$ sont dans le même ordre.

$$\begin{array}{rc} & x < y \\ \overset{\times a>0}{\iff} & ax < ay \\ \overset{+b}{\iff} & ax+b < ay+b \\ \iff & f(x) < f(y) \end{array} \qquad \begin{array}{rc} & x < y \\ \overset{\times a=0}{\implies} & ax = ay = 0 \\ \overset{+b}{\iff} & ax+b = ay+b = b \\ \iff & f(x) = f(y) = b \end{array} \qquad \begin{array}{rc} & x < y \\ \overset{\times a<0}{\iff} & ax > ay \\ \overset{+b}{\iff} & ax+b > ay+b \\ \iff & f(x) > f(y) \end{array}$$

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction affine en fonction du signe de a.

$a < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax+b$	$\searrow$

$a = 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax+b$	$\rightarrow$

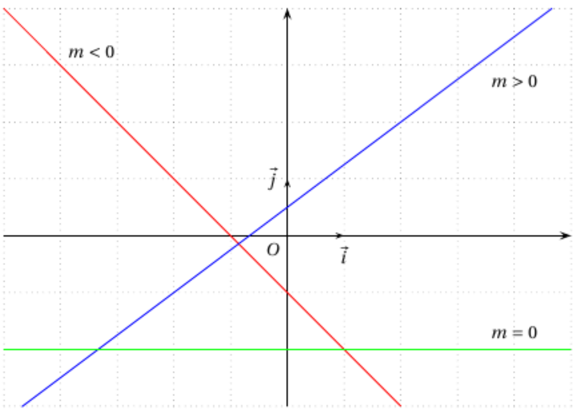
$a > 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax+b$	$\nearrow$

2.1.3 Représentation graphique

Propriété 5 :
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation réduite est $y = mx+p$.
m est appelé le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

***Preuve* :**
Admis pour l'instant



Propriété 6 :

Soit un fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$ représentée par la droite $\mathscr{D}$. L'ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de l'axe des ordonnées.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels distincts, on a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou encore si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de $\mathscr{D}$ on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Preuve :

On note M le point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec l'axe (Oy). Alors on a $x_M = 0$ et $y_M = f(x_M)$. Donc

$$y_M = f(0) \Leftrightarrow y_M = 0 \times a + b \Leftrightarrow y_M = b$$

Soient $x_1 \neq x_2$. Alors on a :

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b \\ f(x_2) = ax_2 + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x_1) - ax_1 = b \\ f(x_2) - ax_2 = b \end{cases}$$

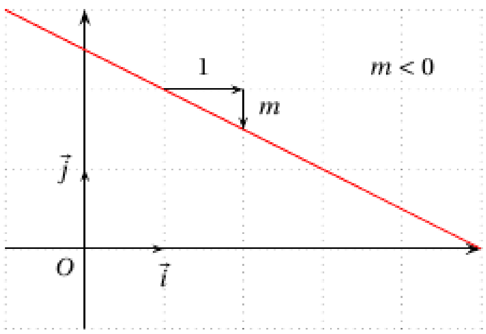
$$\Longrightarrow f(x_1) - ax_1 = f(x_2) - ax_2 \Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = ax_1 - ax_2 \Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)$$

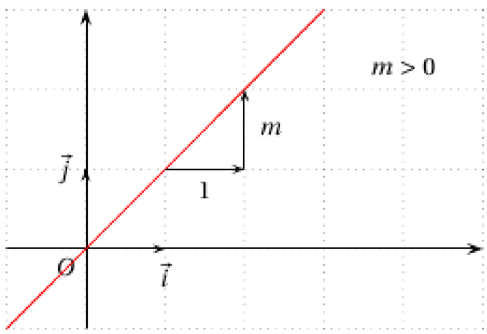
$$\Longleftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a \Longleftrightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Le principe est le même pour les points A et B en raisonnant sur les coordonnées, puisque $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$.

<u>Conséquence : Interprétation graphique du coefficient directeur</u>

Si on choisit deux points A et B tels que $x_B - x_A = 1$ alors $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = y_B - y_A$.





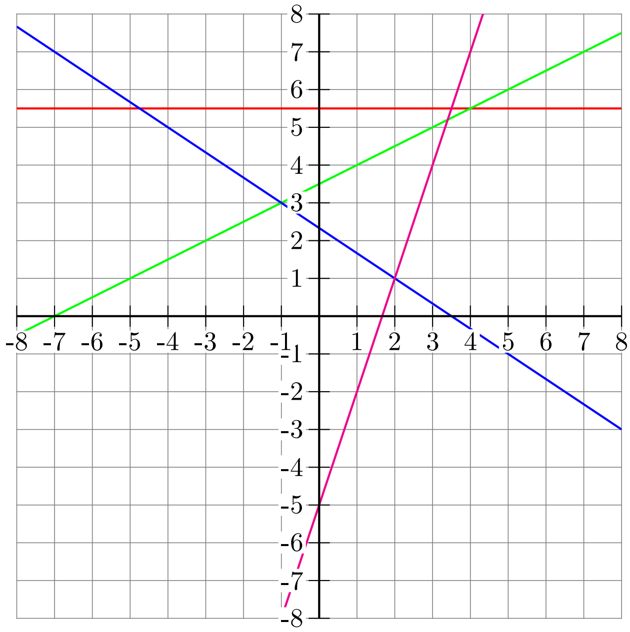
Exercice 5 :

Dans le plan muni un repère orthonormal, construire les droites représentant les fonctions affines suivantes :

$f : x \mapsto -x+7$; $g : x \mapsto 3x-4$; $h : x \mapsto -\frac{5}{2}x+7$; $k : x \mapsto -4$; $l : x \mapsto x$

Exercice 6 :

Déterminer graphiquement l'expression des fonctions affines représentées par chacune des droites ci-dessous :



2.1.4 Signe d'une fonction affine

Travail de l'élève : On cherche à connaître le signe de différentes expressions du type $ax + b$.

1. Etude du signe de $2x - 3$:
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 = 0$
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 < 0$
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 > 0$
   - Consigner ces résultats dans ce tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x - 3$		0	

2. Mêmes questions pour l'expression $-3x - 4$
3. Cas général : Étudier le signe de $ax + b$ où a et b sont des réels et $a \neq 0$

Propriété 7 :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.
Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$ et

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

***Preuve* :**
Si $a > 0$ (on raisonne de même si $a < 0$) :

$$\begin{array}{lc}
 & ax + b = 0 \\
\overset{-b}{\iff} & ax = -b \\
\overset{\times \frac{1}{a}}{\iff} & x = -\dfrac{b}{a}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lc}
 & ax + b > 0 \\
\overset{-b}{\iff} & ax > -b \\
\overset{\times \frac{1}{a} > 0}{\iff} & x > -\dfrac{b}{a}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lc}
 & ax + b < 0 \\
\overset{-b}{\iff} & ax < -b \\
\overset{\times \frac{1}{a} > 0}{\iff} & x < -\dfrac{b}{a}
\end{array}$$

***Exercice 7* :**
Établir le tableau de signe des fonctions affines f, g et h définies par $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -x + 1$ et $h(x) = \dfrac{1}{2}x + 4$

***Exercice 8* :**
Un ticket de bus coûte 1.20 €. On peut aussi prendre un abonnement annuel de 30 € ; le trajouet coûte alors 1 €.

1. On note x le nombre de trajets en bus effectufés dans l'année.
   Donner l'expression de la fonction :
   - f qui à x associe le prix total sans abonnement
   - g qui à x associe le prix total avec abonnement
2. Donner l'expression réduite de $h(x) = f(x) - g(x)$. Que représente $h(x)$?
3. A partir de combien de trajets effectués dans l'année l'abonnement est-il intéressant ?

2.2 La fonction $x \mapsto x^2$

Travail de l'élève : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Démontrer que si a et b sont positifs, alors $0 \leq a^2 < b^2$.
   Que pouvez-vous en déduire sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les positifs ?
2. Démontrer que si a et b sont négatifs, alors $0 \leq a^2 < b^2$ Que pouvez-vous en déduire sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les négatifs ?
3. Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 < b^2$.
   Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 > b^2$.

Que pouvez-vous en déduire sur la comparaison des carrés de deux nombres de signe différent ?

2.2.1 Définition

Définition 2 :

On appelle fonction carrée la fonction définie par $f(x) = x^2$.

Propriété 8 :

La fonction carrée ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

f est la fonction carré. Calculer les images par f des réels :

1. -4
2. $\dfrac{2}{3}$
3. $-\dfrac{11}{5}$
4. $3\sqrt{56}$
5. $-2\sqrt{13}$
6. 10^{41}
7. 8×10^{-4}
8. $2 + \sqrt{5}$

2.2.2 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 9 :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Preuve :

Voir l'activité.

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tableau de variations, la fonction carrée admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Exercice 10 :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $(2.3)^2$ et $(2.15)^2$
2. $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$
3. π^2 et $(\pi - 1)^2$
4. $(2 - \sqrt{7})^2$ et $(2 - \sqrt{5})^2$

Exercice 11 :

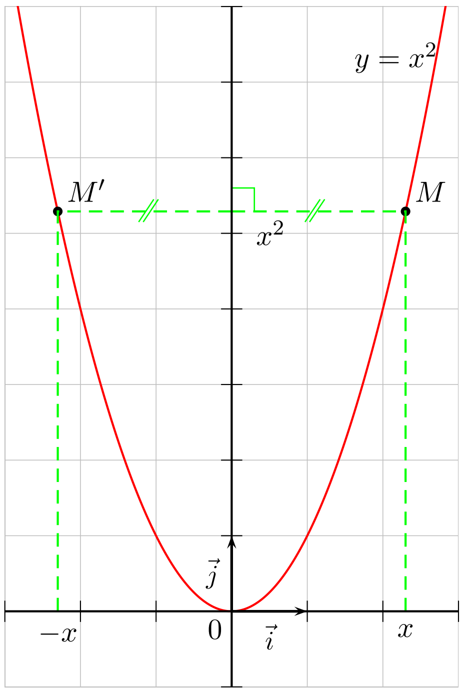
1. Soit x un réel tels que $2 \leq x \leq 4$. Donner un encadrement de $-3x^2$.
2. Soit y un réel tels que $-9 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de de $\dfrac{y^2}{5}$.
3. Soit z un réel tels que $-9 \leq z \leq 1$. Donner un encadrement de de z^2.
4. Soit t un réel tels que $0 \leq \sqrt{-5t-1} \leq 2$. Donner un encadrement de t.

2.2.3 Courbe représentative

Définition 3 :
Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** de sommet l'origine du repère.

On esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	...



Exercice 12 :
Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction carré :

1. $x^2 \leq 5$
2. $x^2 \leq -3$
3. $x^2 > 2$

Exercice 13 :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction carré et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.

Comparer alors un réel et son carré. Justifier les réponses.

Exercice 14 :

1. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle $[-3; 3]$, puis celle de la fonction affine $x \mapsto -x + 2$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
3. Développer $(x + 2)(x - 1)$.
4. Retrouver les solutions de la première question par le calcul.

Propriété 10 :

La courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On dit que la fonction est *paire*.

***Preuve* :**

Pour tout nombre réel x le point $M(x; x^2)$ est sur la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction carré.

Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x; x^2)$.

Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{P}$ car $(-x)^2 = x^2$.

Remarque : On sait qu'un carré est toujours positif.

2.3 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

Travail de l'élève : Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Vérifier que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$
2. Etudier le signe de $\dfrac{b-a}{ab}$.
3. En déduire l'ordre de $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$.

2.3.1 Définition

Définition 4 :

On appelle fonction inverse la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 11 :
La fonction inverse possède un quotient, mais pas racine. Son quotient existe dès que $x \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 15 *:*
f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels *(sans laisser de racine au dénominateur)* :

1. -4
2. 0.5
3. $\dfrac{2}{3}$
4. $-\dfrac{11}{5}$
5. $\sqrt{56}$
6. $-2\sqrt{13}$
7. 10^{41}
8. 8×10^{-4}

2.3.2 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 12 :
La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Preuve **:**
Voir l'activité pour les positifs. On procède de même sur les négatifs.

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

D'après le tableau de variations, la fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 16 *:*
Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\dfrac{1}{-0.012}$ et $\dfrac{1}{-0.099}$
2. $\dfrac{1}{\pi - 3}$ et $\dfrac{1}{0.21}$
3. $\dfrac{1}{\pi - 3}$ et $\dfrac{1}{-0.21}$
4. $\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

Exercice 17 *:*

Soient $A = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $B = \sqrt{7 + 2\sqrt{15}}$.

1. Donner mentalement la valeur exactement de A^2, puis de B^2.
2. Sans aucun calcul supplémentaire, comparer A et B. Expliquer.

Exercice 18 :

1. Soit x un réel tels que $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $-\frac{4}{x}$.
2. Soit y un réel tels que $-5 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de $\frac{10}{y}$.
3. Soit z un réel tels que $0 \leq \frac{1}{-5x-1} \leq 2$. Donner un encadrement de x.

Exercice 19 :

x désigne un nombre réel. Dans chaque cas, dire si l'implication est vraie ou fausse. Expliquer pourquoi.

1. $-5 \leq x \leq -2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 30$
2. $1.37 \leq x \leq 1.42 \quad \Longrightarrow \quad 1.88 \leq x^2 \leq 2.01$
3. $12.5 \leq x \leq 13.2 \quad \Longrightarrow \quad 156.2 \leq x^2 \leq 174.3$
4. $-1 \leq x \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq x^2 \leq 4$

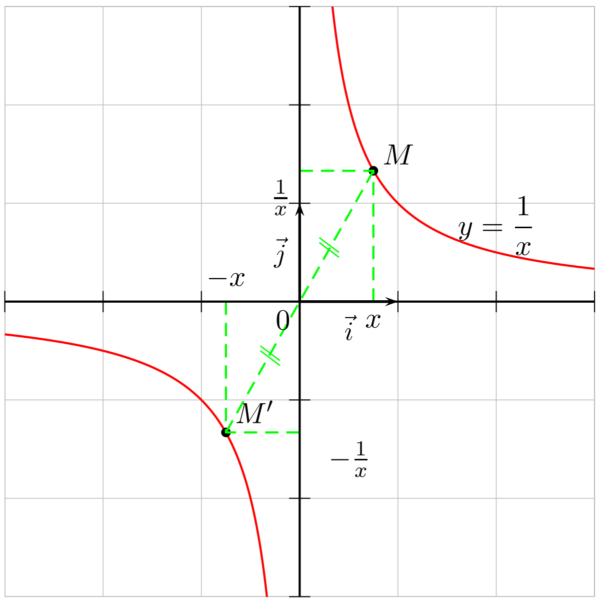
2.3.3 Courbe représentative

Définition 5 :

Dans un repère orthogonal, la courbe repésentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.

On esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$f(x)$	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	-3



Exercice 20 :

Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction inverse :

1. $\dfrac{1}{x} \leq 3$
2. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{4}{3}$
3. $\dfrac{1}{x} > -2$

Exercice 21 :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction inverse et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.

Comparer alors un réel non nul et son inverse. Justifier les réponses.

Propriété 13 :

La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère. On dit que la fonction est *impaire*.

Preuve **:**

Pour tout nombre réel $x \neq 0$ le point $M\left(x; \dfrac{1}{x}\right)$ est sur la hyperbole $\mathscr{H}$ représentative de la fonction inverse.

Son symétrique par rapport à l'origine du repère est $M'\left(-x; -\dfrac{1}{x}\right)$.

Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{H}$ car $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

Remarque : On sait déjà que $\dfrac{1}{x}$ est du signe de x.

Exercice 22 :

Que penser des raisonnement suivants ? *Expliquer*

1. L'équation $x^2 + 1 = 0$ a pour solution $x = -1$.
2. On sait que $x^2 \geq 4^2$ donc $x \geq 4$
3. On sait que $x \leq 10$ donc $\dfrac{1}{x} \leq 0.1$
4. L'équation $x^2 = 16$ a pour solution $x = 4$

Trouver des contre-exemples dans chaque cas que vous avez jugés erronées.

Exercice 23 :

Voici un algorithme :

- Lire x (x nombre réel non nul)
- Donner à u la valeur x^2
- Donner à y la valeur $\dfrac{1}{u}$

Quelle est la fonction définie par cet algorithme ?

Exercice 24 :

Ecrire un algorithme qui lit un nombre non nul x et qui affiche alors le plus grand des nombres x^2 et $\dfrac{1}{x}$.

Exercice 25 :

1. Ecrire l'algorithme de calcul de la fonction f définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{-5}{(x-2)^2}+3$$

2. Soient a et b appartenant à $]-\infty;2[$ tels que $a<b$. Comparer dans l'ordre, *en justifiant* :

   (a) $a-2$ et $b-2$

   (b) $(a-2)^2$ et $(b-2)^2$

   (c) $\dfrac{1}{(a-2)^2}$ et $\dfrac{1}{(b-2)^2}$

   (d) $\dfrac{-5}{(a-2)^2}$ et $\dfrac{-5}{(b-2)^2}$

   (e) $\dfrac{-5}{(a-2)^2}+3$ et $\dfrac{-5}{(b-2)^2}+3$

3. En déduire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]-\infty;2[$.
4. En suivant la même démarche, dire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]2;+\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations de f.

3 Tableaux de signes

On connait déjà le signe d'un carré, d'un inverse ou de n'importe quelle expression du type $ax+b$. Grâce à la règle des signes dans une multiplication (ou une division), on peut alors trouver le signe d'un produit comme d'un quotient d'expressions de ce type.
On utlise pour cela un grand tableau de signes, dans lequel on fait figurer les éventuelles valeurs interdites.

Exemple :

Pour étudier le signe de $P(x)=(2x+1)(-x+2)$, on dresse un tableau de signe avec une ligne par facteur :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+1)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :
- $P(x)>0$ ssi $x\in\left]-\frac{1}{2};2\right[$
- $P(x)<0$ ssi $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$
- $P(x)=0$ ssi $x\in\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

On sait ainsi que les solutions de l'inéquation $P(x)<0$ est $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$

Exercice 26 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(3x+4)(-2x+1) \geq 0 \qquad (x+3)(x^2+3) \leq 0 \qquad (3-x)(2+x)(1-x) < 0$$

Exemple :

Pour étudier le signe de l'expression $Q(x) = \dfrac{3-x}{4x-1}$ on commence par trouver les éventuelles valeurs interdites.

VI : $4x-1 \neq 0 \iff x \neq \dfrac{1}{4}$.

Ensuite on procède comme dans l'exemple précédent.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3-x}{4x-1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Exercice 27 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{-x+5}{-4-2x} > 0 \qquad \frac{(1+x)^2}{1-2x} \leq 0 \qquad \frac{(x^2+1)(x-2)}{(3-2x)} > 0$$

Méthode de résolution d'inéquations

Toutes les étapes ne sont pas nécessaires

- Trouver les valeurs interdites pour l'inconnue
- Tout faire apparaître dans le même membre
- Mettre au même dénominateur le membre non nul
- Factoriser le membre non nul
- Dresser son tableau de signe
- Donner l'ensemble des solutions

Exercice 28 :
Résoudre les inéquations suivantes :

$(x-2)(3x-4) \geq (x-2)(2x+6)$ $(x-2)^2 \leq 9$ $(x+3)^2 < (2x+1)^2$ $\dfrac{4-x}{8-x} \geq \dfrac{1-3x}{8-x}$

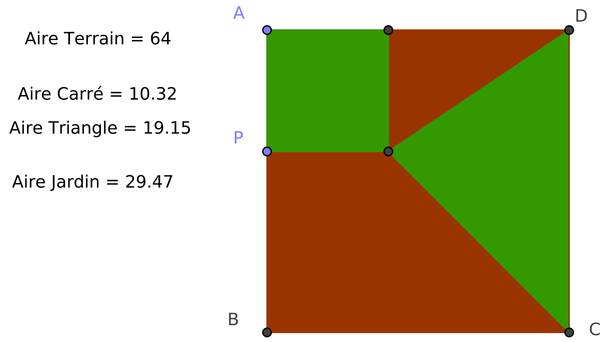
$\dfrac{2x+3}{x+1} \geq 4$ $\dfrac{25-x^2}{3x+2} > 0$ $\dfrac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)} \leq 0$

.

4 Problèmes

4.1 Les fonctions polynômes de degré 2

Travail de l'élève : Une entreprise paysagiste doit créer un espace « jardin et terrasse »sur un terrain $ABCD$ de forme carré de côté 8m. Le projet présenté aux clients est schématisé sur Géogébra.



La partie jardin est colorée en vert. La terrasse occupe le reste du terrain. Le point P peut occuper n'importe quelle position sur le segment $[AB]$.
Au cours des échanges entre le client et le paysagiste, diverses questions sont posées :

- Est-il possible que l'aire du jardin soit égale à la moitié de celle du terrain ?
- Est-il possible que l'aire du jardin soit égale au quart de celle du terrain ?
- Est-il possible de faire en sorte que l'aire du jardin soit minimale ?

Faire le travail suivant pour aider le paysagiste à répondre à ces questions.

1. Expérimenter à l'aide du logiciel et émettre des conjectures sur les questions posées
2. On note x la longueur AP en mètres. Exprmier l'aire du jardin en fonction de x.
3. Parmi les expressions suivantes, reconnaître celles qui donnent aussi l'aire du jardin :

   $x^2 - 4x + 32$ $x^2 - 8x + 64$ $(x-2)^2 + 28$ $x(x+4)$

4. Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre à chacune des questions préliminaires.
5. Les réponses sont-elles conformes aux suggestion émises ?

Travail de l'élève : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 8x + 5$.

1. Montrer que $f(x) = -4(x-1)^2 + 9$
2. Montrer que $f(x) = (5-2x)(2x+1)$
   Pour les questions suivantes, on choisira la forme la plus appropriée de la fonction f.
3. Ecrire un algorithme de calcul de la fonction f.
4. Soient a et b appartenant à $]-\infty; 1[$. Comparer dans l'ordre, *en justifiant* :
   (a) $a-1$ et $b-1$
   (b) $(a-1)^2$ et $(b-1)^2$
   (c) $-4(a-1)^2$ et $-4(b-1)^2$
   (d) $-4(a-1)^2+9$ et $-4(b-1)^2+9$
5. En déduire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]-\infty; 1[$.
6. En suivant la même démarche, dire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]1; +\infty[$.
7. En déduire le tableau de variations de f.
8. Etudier le signe de la fonction f.
9. Tracer la courbe représentative de f.

Propriété 14 :

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On appelle les fonctions de ce type les fonctions polynôme de degré deux.
On admet les résultats suivants :

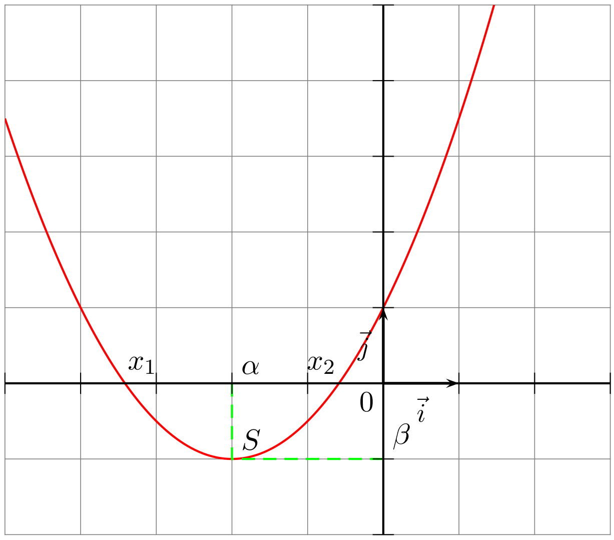
– Il existe α et β tel que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Il s'agit de la forme *canonique* de $f(x)$.
  Elle est utile pour étudier les variations et extrema de f.
  L'algorithme de cette f peut alors être décrit par :

$$x \mapsto x-\alpha \mapsto (x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$$

– Dans un repère orthonormal, la représentation graphique de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$.

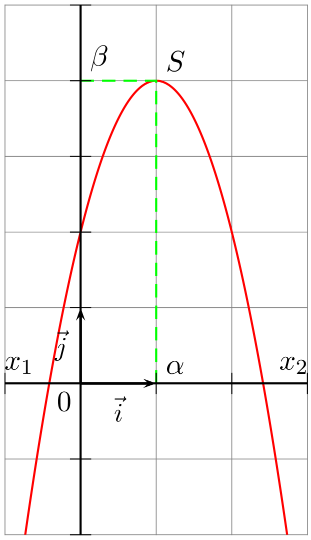
– Cette parabole a pour axe de symétrie la droite passant par le sommet S et parallèle à l'axe des ordonnées.
– Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut, si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.
– On peut parfois factoriser $f(x)$. C'est le cas des paraboles représentant f qui coupent l'axe des abscisses du repère en deux points $A(x_1; 0)$ et $B(x_2; 0)$ (éventuellement $A = B$).
  On obtient alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Il s'agit de la forme factorisée de $f(x)$.
  Elle est utile pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ et connaître le signe de f.

Si $a > 0$



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$	$\searrow$	β	$\nearrow$

Si $a < 0$



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Exercice 29 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
2. Montrer que $f(x) = -2(x-4)(x-2)$
3. Sélectionner dans chaque cas la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes et y répondre.
   (a) En quel point la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?
   (b) En quels points la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Quel est le sens de variation de la fonction f ?
   (d) Quel est le maximum de la fonction ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 30 :

Voici trois forme de la même fonction f :

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 27 \qquad f(x) = 3(x-1)(x+5) \qquad f(x) = 3x^2 + 12x - 15$$

1. Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les images de : $-2 \quad 1 \quad 0$
2. Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les antécédents de : $0 \quad -15 \quad -27$
3. -30 a-t-il des antécédents par f ?
4. Dresser le tableau de variations de f. Quel est le minimum de f ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 31 :

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les antécédents de -4 par f.
2. En déduire par symétrie l'abscisse du somme de $\mathscr{P}$.
3. Calculer alors l'ordonnée de ce sommet.
4. Tracer $\mathscr{P}$.

Exercice 32 :

f est une fonction polynôme de degré 2. Voici son tableau de variations :

x	3		1		5
$f(x)$		$\nearrow$	1.85	$\searrow$	-2.15

– Peut-on savoir $f(-3)$? Justifier.
– Donner l'expression de $f(x)$.

4.2 Les fonctions homographiques

Définition 6 :

Dire qu'une fonction f est une fonction homographique signifie qu'il existe des nombres réels a, b, c et d, avec $c \neq 0$ tels que pour tout nombre réel x n'annulant pas le dénominateur on a $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Propriété 15 :

L'ensemble de définition d'une fonction homographique du type $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est

$$\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$$

Preuve **:**

$cx + d = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{d}{c}$

Exercice 33 :

Soit f la fonction $x \mapsto -3 + \dfrac{1}{x+1}$

1. Identifier l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est une fonction homographique.
3. Ecrire l'algorithme de calcul $f(x)$
4. Soient a et b deux réels appartenant à $]-1;+\infty[$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$. En déduire le sens de variation de f sur $]-1;+\infty[$.
5. En procédant de même, étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;-1[$.
6. Dresser le tableau de variations de f
7. Dresser le tableau de signes de f

Les Annexes

Exercices

Exercice 1 :

Résoudre l'inéquation $x - 4 > 2$. Représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exercice 2 :

Soient x et y tels que $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y < 2$. Encadrer $x + y$.

Exercice 3 :

Soient x et y deux réels.

1. On considère l'algorithme suivant :
   - Entrée : Saisir x et y
   - Traitement :
     - a prend la valeur $(x + y)^2$
     - b prend la valeur $(x^2 + y^2)$
   - Sortie : Afficher $a - b$

   (a) Qu'affiche la machine pour $x = 3$ et $y = 4$? $x = 3$ et $x = -4$? $x = -3$ et $y = -4$?

   (b) Conjecturer le signe $a - b$ suivant les signes de x et y.

   (c) En déduire la comparaison de a et b suivant les signes de x et y.

2. Développer et réduire $(x + y)^2 - (x^2 + y^2)$
3. En déduire la comparaison du carré de la somme de deux réels avec la somme de leurs carrés

Exercice 4 :

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = 9$ et $f(3) = -11$.

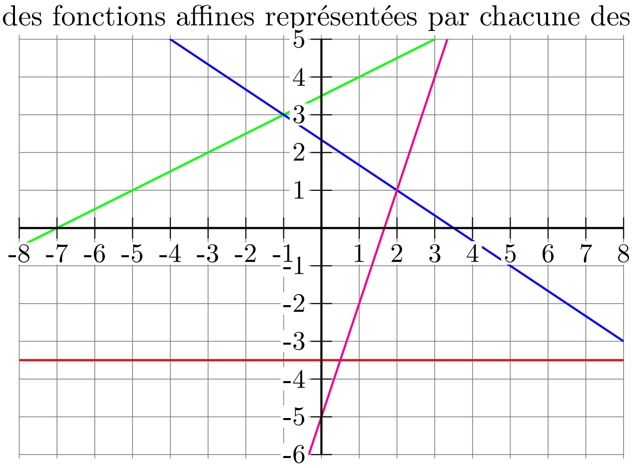
Exercice 5 :

Dans le plan muni un repère, construire les droites représentant les fonctions affines suivantes :

$f : x \mapsto -x+7$; $g : x \mapsto 3x-4$; $h : x \mapsto -\frac{5}{2}x+7$; $k : x \mapsto -4$; $l : x \mapsto x$

Exercice 6 :

Déterminer l'expression des fonctions affines représentées par chacune des droites ci-dessous :



Exercice 7 :

Établir le tableau de signe des fonctions affines f, g et h définies par $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -x + 1$ et $h(x) = \frac{1}{2}x + 4$

Exercice 8 :

Un ticket de bus coûte 1.20€. On peut aussi prendre un abonnement annuel de 30€ ; le trajouet coûte alors 1€.

1. On note x le nombre de trajets en bus effectufés dans l'année.
   Donner l'expression de la fonction :
   – f qui à x associe le prix total sans abonnement
   – g qui à x associe le prix total avec abonnement
2. Donner l'expression réduite de $h(x) = f(x) - g(x)$. Que représente $h(x)$?
3. A partir de combien de trajets effectués dans l'année l'abonnement est-il intéressant ?

Exercice 9 :

f est la fonction carré. Calculer les images par f des réels :

1. -4
2. $\frac{2}{3}$
3. $-\frac{11}{5}$
4. $3\sqrt{56}$
5. $-2\sqrt{13}$
6. 10^{41}
7. 8×10^{-4}
8. $2 + \sqrt{5}$

Exercice 10 :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $(2.3)^2$ et $(2.15)^2$
2. $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$
3. π^2 et $(\pi - 1)^2$
4. $(2 - \sqrt{7})^2$ et $(2 - \sqrt{5})^2$

Exercice 11 :

1. Soit x un réel tels que $2 \leq x \leq 4$. Donner un encadrement de $-3x^2$.
2. Soit y un réel tels que $-9 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de de $\frac{y^2}{5}$.
3. Soit z un réel tels que $-9 \leq z \leq 1$. Donner un encadrement de de z^2.
4. Soit t un réel tels que $0 \leq \sqrt{-5t - 1} \leq 2$. Donner un encadrement de t.

Exercice 12 :

Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction carré :

1. $x^2 \leq 5$
2. $x^2 \leq -3$
3. $x^2 > 2$

Exercice 13 :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction carré et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.

Comparer alors un réel et son carré. Justifier les réponses.

Exercice 14 :

1. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle $[-3;3]$, puis celle de la fonction affine $x \mapsto -x+2$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
3. Développer $(x+2)(x-1)$.
4. Retrouver les solutions de la première question par le calcul.

Exercice 15 :

f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels *(sans laisser de racine au dénominateur)* :

1. -4
2. 0.5
3. $\dfrac{2}{3}$
4. $-\dfrac{11}{5}$
5. $\sqrt{56}$
6. $-2\sqrt{13}$
7. 10^{41}
8. 8×10^{-4}

Exercice 16 :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\dfrac{1}{-0.012}$ et $\dfrac{1}{-0.099}$
2. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{0.21}$
3. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{-0.21}$
4. $\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

Exercice 17 :

Soient $A=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $B=\sqrt{7+2\sqrt{15}}$.

1. Donner mentalement la valeur exactement de A^2, puis de B^2.
2. Sans aucun calcul supplémentaire, comparer A et B. Expliquer.

Exercice 18 :

1. Soit x un réel tels que $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $-\dfrac{4}{x}$.
2. Soit y un réel tels que $-5 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de $\dfrac{10}{y}$.
3. Soit z un réel tels que $0 \leq \dfrac{1}{-5x-1} \leq 2$. Donner un encadrement de x.

Exercice 19 :

x désigne un nombre réel. Dans chaque cas, dire si l'implication est vraie ou fausse. Expliquer pourquoi.

1. $-5 \leq x \leq -2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 30$
2. $1.37 \leq x \leq 1.42 \quad \Longrightarrow \quad 1.88 \leq x^2 \leq 2.01$
3. $12.5 \leq x \leq 13.2 \quad \Longrightarrow \quad 156.2 \leq x^2 \leq 174.3$
4. $-1 \leq x \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq x^2 \leq 4$

Exercice 20 :

Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction inverse :

1. $\dfrac{1}{x} \leq 3$
2. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{4}{3}$
3. $\dfrac{1}{x} > -2$

Exercice 21 :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction inverse et de la fonction affine définie par $f(x) = x$. Comparer alors un réel non nul et son inverse. Justifier les réponses.

Exercice 22 :

Que penser des raisonnement suivants ? *Expliquer*

1. L'équation $x^2 + 1 = 0$ a pour solution $x = -1$.
2. On sait que $x^2 \geq 4^2$ donc $x \geq 4$
3. On sait que $x \leq 10$ donc $\dfrac{1}{x} \leq 0.1$
4. L'équation $x^2 = 16$ a pour solution $x = 4$

Trouver des contre-exemples dans chaque cas que vous avez jugés erronées.

Exercice 23 :

Trouver la fonction associée à l'algorithme suivant :

– Lire x (x nombre réel non nul)
– Donner à u la valeur x^2
– Donner à y la valeur $\dfrac{1}{u}$

Exercice 24 :

Ecrire un algorithme qui lit un nombre non nul x et qui affiche alors le plus grand des nombres x^2 et $\dfrac{1}{x}$.

Exercice 25 :

1. Ecrire l'algorithme de calcul de la fonction f définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} + 3$$

2. Soient a et b appartenant à $]-\infty; 2[$ tels que $a < b$. Comparer dans l'ordre, *en justifiant* :

   (a) $a - 2$ et $b - 2$

   (b) $(a-2)^2$ et $(b-2)^2$

   (c) $\dfrac{1}{(a-2)^2}$ et $\dfrac{1}{(b-2)^2}$

   (d) $\dfrac{-5}{(a-2)^2}$ et $\dfrac{-5}{(b-2)^2}$

   (e) $\dfrac{-5}{(a-2)^2} + 3$ et $\dfrac{-5}{(b-2)^2} + 3$

3. En déduire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]-\infty; 2[$.
4. En suivant la même démarche, dire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]2; +\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 26 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(3x+4)(-2x+1) \geq 0 \qquad (x+3)(x^2+3) \leq 0 \qquad (3-x)(2+x)(1-x) < 0$$

Exercice 27 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{-x+5}{-4-2x} > 0 \qquad \frac{(1+x)^2}{1-2x} \leq 0 \qquad \frac{(x^2+1)(x-2)}{(3-2x)} > 0$$

Exercice 28 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(x-2)(3x-4) \geq (x-2)(2x+6) \qquad (x-2)^2 \leq 9 \qquad (x+3)^2 < (2x+1)^2 \qquad \frac{4-x}{8-x} \geq \frac{1-3x}{8-x}$$

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq 4 \qquad \frac{25-x^2}{3x+2} > 0 \qquad \frac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)} \leq 0$$

.

Exercice 29 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
2. Montrer que $f(x) = -2(x-4)(x-2)$
3. Sélectionner dans chaque cas la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes et y répondre.
   (a) En quel point la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?
   (b) En quels points la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Quel est le sens de variation de la fonction f ?
   (d) Quel est le maximum de la fonction ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 30 :

Voici trois forme de la même fonction f :

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 27 \qquad f(x) = 3(x-1)(x+5) \qquad f(x) = 3x^2 + 12x - 15$$

1. Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les images de : $-2 \quad 1 \quad 0$
2. Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les antécédents de : $0 \quad -15 \quad -27$
3. -30 a-t-il des antécédents par f ?
4. Dresser le tableau de variations de f. Quel est le minimum de f ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 31 :

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les antécédents de -4 par f.
2. En déduire par symétrie l'abscisse du somme de $\mathscr{P}$.
3. Calculer alors l'ordonnée de ce sommet.
4. Tracer $\mathscr{P}$.

Exercice 32 :

f est une fonction polynôme de degré 2. Voici son tableau de variations :

x	3		1		5
$f(x)$		↗	1.85	↘	-2.15

– Peut-on savoir $f(-3)$? Justifier.
– Donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 33 :

Soit f la fonction $x \mapsto -3 + \dfrac{1}{x+1}$

1. Identifier l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est une fonction homographique.
3. Ecrire l'algorithme de calcul $f(x)$
4. Soient a et b deux réels appartenant à $]-1;+\infty[$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$. En déduire le sens de variation de f sur $]-1;+\infty[$.
5. En procédant de même, étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;-1[$.
6. Dresser le tableau de variations de f
7. Dresser le tableau de signes de f

Notion d'équilibre

1. Charlotte et David jouent à « who's the biggest brain »sur Facebook.
   Charlotte est pour l'instant en tête. Donner si possible le vainqueur dans les cas suivant :
   - S'ils gagnent chacun autant de points dans une partie qui suit
   - S'ils perdent autant de points chacun
   - Si Charlotte gagne plus de points que David
   - si Charlotte gagne moins de points que David
2. Soient a et b deux nombres tels que $a < b$.
   (a) Comparer alors les nombres :
      i. $a + 354$ et $b + 354$
      ii. $a - 84354$ et $b - 84354$
      iii. $45a$ et $45b$
      iv. $-2a$ et $-2b$
      v. $\frac{a}{3}$ et $\frac{b}{3}$
      vi. $-\frac{a}{3}$ et $-\frac{b}{3}$

   (b) Trouver un exemple pour a et b tel qu'on ait $a^2 < b^2$ et un tel qu'on ait $a^2 > b^2$
   (c) Trouver un exemple pour a et b tel qu'on ait $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ et un tel qu'on ait $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Signe d'une fonction affine

On cherche à connaître le signe de différentes expressions du type $ax + b$.

1. Etude du signe de $2x - 3$:
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 = 0$
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 < 0$
   - Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x - 3 > 0$
   - Consigner ces résultats dans ce tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-3$		0	

2. Mêmes questions pour l'expression $-3x - 4$
3. Cas général : Étudier le signe de $ax + b$ où a et b sont des réels et $a \neq 0$

La fonction carré

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Démontrer que si a et b sont positifs, alors $0 \leq a^2 < b^2$.
   Que pouvez-vous en déduire sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les positifs ?
2. Démontrer que si a et b sont négatifs, alors $0 \leq a^2 < b^2$ Que pouvez-vous en déduire sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les négatifs ?
3. Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 < b^2$.
   Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 > b^2$.
   Que pouvez-vous en déduire sur la comparaison des carrés de deux nombres de signe différent ?

La fonction inverse

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Vérifier que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$
2. Etudier le signe de $\dfrac{b-a}{ab}$.
3. En déduire l'ordre de $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$.

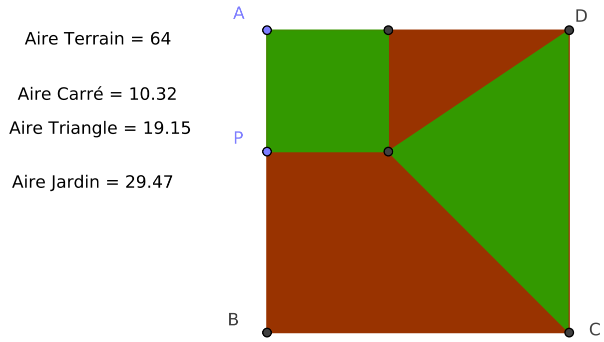
Les fonctions polynômes de degré 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 8x + 5$.

1. Montrer que $f(x) = -4(x-1)^2 + 9$
2. Montrer que $f(x) = (5-2x)(2x+1)$
   Pour les questions suivantes, on choisira la forme la plus appropriée de la fonction f.
3. Ecrire un algorithme de calcul de la fonction f.
4. Soient a et b appartenant à $]-\infty; 1[$. Comparer dans l'ordre, *en justifiant* :
   (a) $a-1$ et $b-1$
   (b) $(a-1)^2$ et $(b-1)^2$
   (c) $-4(a-1)^2$ et $-4(b-1)^2$
   (d) $-4(a-1)^2 + 9$ et $-4(b-1)^2 + 9$
5. En déduire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]-\infty; 1[$.
6. En suivant la même démarche, dire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]1; +\infty[$.
7. En déduire le tableau de variations de f.
8. Etudier le signe de la fonction f.
9. Tracer la courbe représentative de f.

Problème d'aire minimale

Une entreprise paysagiste doit créer un espace « jardin et terrasse »sur un terrain $ABCD$ de forme carré de côté 8m. Le projet présenté aux clients est schématisé sur Géogébra.



La partie jardin est colorée en vert. La terrasse occupe le reste du terrain. Le point P peut occuper n'importe quelle position sur le segment $[AB]$.
Au cours des échanges entre le client et le paysagiste, diverses questions sont posées :

– Est-il possible que l'aire du jardin soit égale à la moitié de celle du terrain ?
– Est-il possible que l'aire du jardin soit égale au quart de celle du terrain ?
– Est-il possible de faire en sorte que l'aire du jardin soit minimale ?

Faire le travail suivant pour aider le paysagiste à répondre à ces questions.

1. Expérimenter à l'aide du logiciel et émettre des conjectures sur les questions posées
2. On note x la longueur AP en mètres. Exprmier l'aire du jardin en fonction de x.
3. Parmi les expressions suivantes, reconnaître celles qui donnent aussi l'aire du jardin :

$$x^2 - 4x + 32 \qquad x^2 - 8x + 64 \qquad (x-2)^2 + 28 \qquad x(x+4)$$

4. Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre à chacune des questions préliminaires.
5. Les réponses sont-elles conformes aux suggestion émises ?

Voile avec Simone

Simone veut se construire un parasol pour chez elle. Elle décide de prendre le tissu de sa planche à voile. Elle accroche un sommet à dans l'angle de sa terrasse, un autre sur une barre de 5 m le long d'un mur et accroche le dernier sommet de sa voile sur un arceau métallique en forme de quart de cercle, installé par ses soins. Ceci lui permet de faire coulisser sa voile pour avoir le plus d'ombre possible.

***Le but du problème** est de trouver la surface maximale d'ombre que Simone peut avoir à midi.*

Modélisation de la situation : On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $OI = 5$. M est un point quelconque de ce quart de cercle, H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO. On cherche où placer M pour que l'aire du triangle OHM soit maximale.

1. **Réaliser la figure et rédiger une conjecture :**
   (a) Faire un schéma de la situation à la main.
   (b) Préciser dans l'ordre les constructions que vous venez de réaliser pour faire la figure.
   (c) Rédiger le programme de construction de la figure sous Géogébra (décrire les étapes).
   (d) Réaliser ce programme et **appeler le professeur** pour qu'il valide la figure.
   (e) Réaliser les mesures nécessaires pour répondre au problème.
   (f) Rédiger alors une conjecture graphique et **appeler le professeur**.
2. **Étude graphique fonctionnelle du problème :**
   L'aire du triangle OMH dépend de la distance OH. On souhaite tracer la courbe représentative de l'aire de OMH en fonction de la distance OH.
   (a) Créer un tableau de valeurs donnant l'aire de OMH en fonction de OH.
   (b) Sur le même graphique, construire le point N qui a la même abscisse que H et dont l'ordonnée est l'aire de OHM.
   (c) Tracer la courbe en utilisant la commande “courbe : = lieu (point sur la courbe, point mobile dont il dépend)”.
   Êtes vous certains d'avoir tracé la bonne courbe ? Justifier. **Appeler le professeur**.
   (d) Par lecture graphique, déterminer les valeurs de OH pour lesquelles le triangle OMH mesure 4 unités d'aire.
   (e) Décrire les variations de la courbe par lecture graphique.
   (f) Déterminer alors la position du point H qui donne la plus grande aire du triangle OMH
   (g) Déterminer l'aire maximale du triangle OMH
   (h) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux trouvés précédemment ?
   (i) A-t-on trouvé la valeur exacte de la solution du problème ? **Appeler le professeur**.
3. **Réponse au problème de Simone**
   (a) Où Simone doit-elle mettre ses sommets mobiles de voile pour avoir $4m^2$ d'ombre ?
   (b) Où Simone doit-elle mettre ses sommets mobiles de voile pour avoir le maximum d'ombre ? Quelle surface d'ombre a-t-elle alors à disposition ?
4. **Rédiger toutes les questions manuscrites sur feuille pour vendredi prochain.**