Chapitre 5 : Repérage dans le plan

C. Aupérin

2009-2010

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" THURSTON MOORE

Dernière modification : 1er février 2010

Table des matières

Cours : Repérage dans le plan

Exercices d'introduction

Exercice 1 :
Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles de centre O et de diamètres respectifs $[PQ]$ et $[MN]$. Faire un schéma.
Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

Exercice 2 :
E, F, G et H sont quatre points tels que $(EF)//(GH)$ et $(EH)//(FG)$. Faire un schéma.
Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

Exercice 3 :
Placer trois points A, B et C non alignés.
Construire à la règle et au compas les parallélogrammes $ABCD$ et $ABDC$.

1 Un nouveau déplacement

1.1 La translation de vecteur donné

Travail de l'élève : Au vidéo-projecteur ou en salle informatique.

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique, placer des points libres A, B, C, D, M.
2. Par définition, la translation qui transforme A en B associe, à tout point M du plan, le point N tel que$[AN]$ et $[BM]$ ont le même milieu.
   - Construire ce point N.
   - Ecrire l'algorithme de construction sur une feuille.
   - Quelle est la nature du quadrilatère $ABNM$? *(Justifier)*
   - Déplacer le point M sur la droite (AB). Que constate-t-on ?
3. Le logiciel possède une instruction « Translation », mais pour l'utiliser, il faut créer d'abord **un vecteur**.
   Créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Par quoi Géogébra le représente-t-il ?
4. Créer le point M_1 associé au point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5. Que constate-t-on ?
6. Créer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ et le point M_2 associé à M par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
7. Déplacer les points C et D de façon que M_2 et M_1 soient confondus. Lorsque cela se produit, conjecturer la nature du quadrilatère $ABDC$.
8. Démontrer cette conjecture.
9. Déplacer les points C et D de façon que M_2 et M soient confondus. Que constate-t-on ?
10. Créer M_1', l'image de M_1 par la translation qui transforme B en A. Comparer alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

A et B désignent deux points du plan.

Définition 1 : *Translation*

La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan l'unique point D tel que les segments $[BC]$ et $[AD]$ ont le même milieu.
Autrement dit, il s'agit de l'unique point D tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

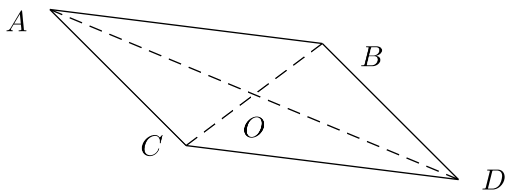
Remarques :

- ***Attention !***
  L'ordre des lettres est important.

- Si les points A, B et C sont alignés, le parallélogramme $ABDC$ est aplati.
- Si les points A et B sont confondus, autrement dit si la translation associe A à lui-même, alors elle associe tout point C du plan à lui-même (elle ne change rien).
- La translation est une nouvelle transformation du plan.
  Il s'agit d'une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les longueurs.
  Elle conserve aussi l'alignement et les angles.

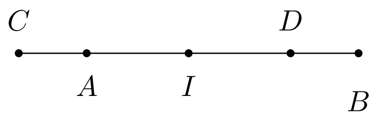
Exemples :

A, B, et C non alignés :



$ABDC$ est un parallélogramme
$[BC]$ et $[AD]$ ont même milieu O

A, B, et C alignés :



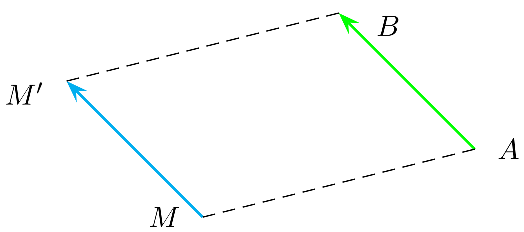
$[BC]$ et $[AD]$ ont même milieu I
$ABDC$ est un parallélogramme aplati

Définition 2 : *Translation de vecteur*

La translation qui transforme A en B consiste à déplacer tout point M du plan d'un trajet équivalent à celui rectiligne qui va de A vers B. On appellera désormais ce déplacement la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$, où $\overrightarrow{AB}$ désigne le déplacement rectiligne de A vers B. On notera $t_{\overrightarrow{AB}}$.

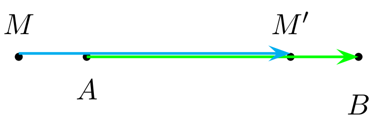
Exemples :

A, B, et M non alignés :



$ABM'M$ est un parallélogramme

A, B, et M alignés :



$ABM'M$ est un parallélogramme aplati

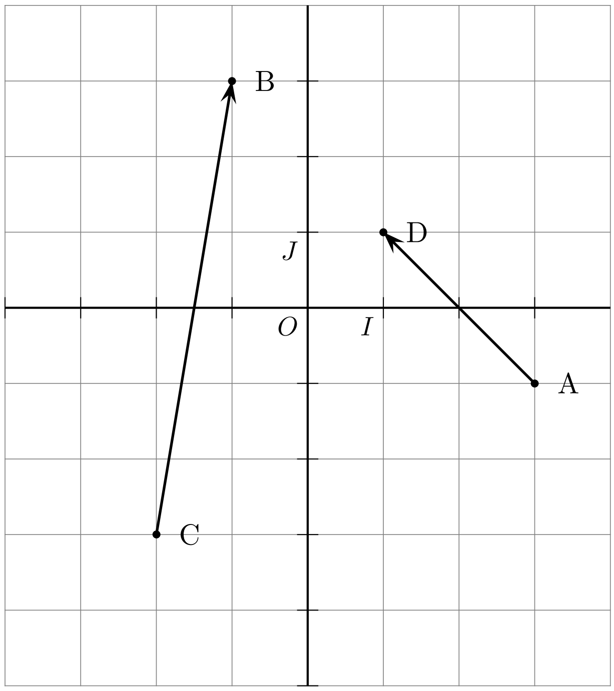
Remarques :

- La flèche indique le sens de A vers B.
- Le mot vecteur vient du latin « vector », dérivé du verbe « vehere », qui signifie transporter. Un vector désigne donc un véhicule, par exemple à l'époque un chariot.
- Un vecteur est indépendant de son origine, seul compte le trajet entre son départ et son arrivée.

1.2 Caractérisation des vecteurs

Travail de l'élève :

Ci-contre sont représentés deux vecteurs.



1. Calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{AD}$
2. Calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{CB}$
3. Placer F, l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
4. Donner la nature du quadrilatère $ADFC$.
5. Placer G, l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.
6. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AD}$

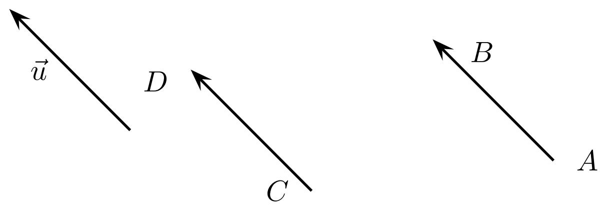
Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.

Définition 3 : *Egalité de vecteurs*

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que la translation qui transforme A en B, transforme le point C en D.
Autrement dit $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{CD}}$. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

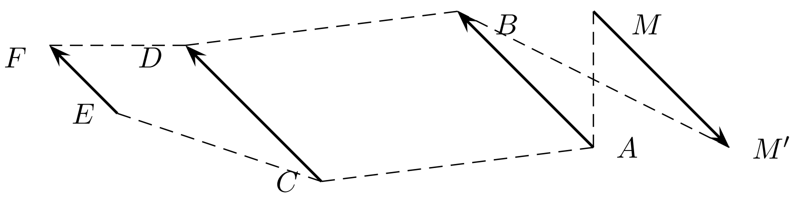
Remarque : Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

Exemples :



Propriété 1 :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Exemples :

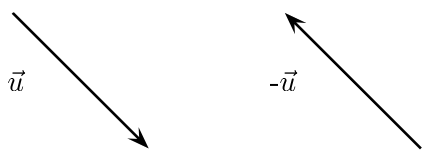


Exercice 4 :
Placer 4 points A, B, C et N non alignés.
Construire à la règle non graduée et au compas le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine C et celui d'extrémité N.

Exercice 5 :
A, B, O et O' sont quatre points distincts non alignés.
Soient C et D les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.
E et F les symétriques respectifs de A et B par rapport à O'.
Démontrer que $DCEF$ est un parallélogramme.

Définition 4 : *Vecteur nul*
La translation qui transforme A en lui-même est associée au vecteur $\overrightarrow{AA}$.
On appelle le représentant de ce vecteur le *vecteur nul* et on le note $\vec{0}$.

Définition 5 : *Vecteur opposé*
Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B et A.
C'est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, aussi noté $-\overrightarrow{AB}$.



Caractérisation d'un vecteur
Un vecteur non nul du plan est caractérisé par :
- Sa direction
- Son sens
- Sa longueur

Remarques :

- Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa longueur vaut 0.
- Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur, mais des sens opposés

Définition 6 : *Norme*

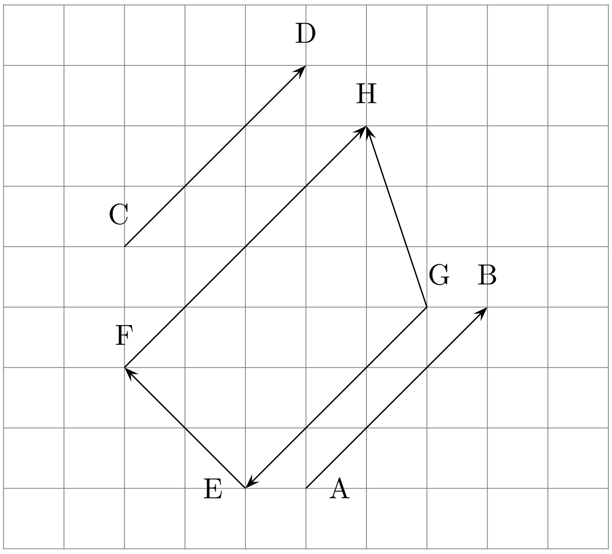
La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme. C'est un donc nombre positif ou nul.
On le note $||\vec{u}||$. En particulier : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Exercice 6 *:*

Sur le dessin on a représenté six vecteurs.

1. Donner les vecteurs égaux, puis les vecteurs opposés.

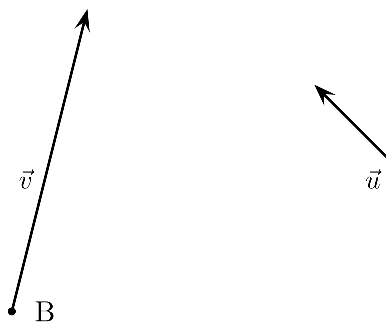
2. Reproduire chacun des vecteurs avec pour origine le point F.



2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Somme

Travail de l'élève : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A et B deux points du plan.



1. Construire A_1 et B_1 images respectives de A et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. Construire A_2 et B_2 images respectives de A_1 et B_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
3. Conjecturer la nature de la transformation f telle que $f(A) = A_2$ et $f(B) = B_2$.

Définition 7 : *Somme de vecteurs*

La *somme de deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On le note $\vec{u}+\vec{v}$.

Propriété 2 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

Méthode de constructions

A étant un point quelconque, pour construire C tel que $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ on peut procéder de deux façons :

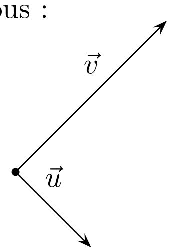
1. On place B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.
   « On dispose bout à bout les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. »
2. On place B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, puis le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$.
   On construit le parallélogramme $ABCD$.
   Il s'agit de la diagonale du parallélogramme construit.

Propriété 3 : *Relation de Chasles*

On a pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

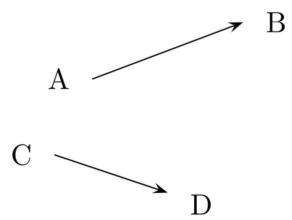
Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+(-\overrightarrow{DB})=\vec{0}$

3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$



4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$

Exercice 7 :

$EFGH$ est un rectangle de centre I.

1. Construire le représentant d'origine G du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{FG}$.
2. Démontrer que $\vec{u} = \overrightarrow{EI}$.

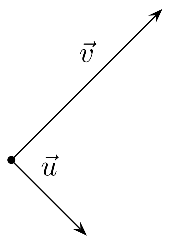
2.2 Conséquences et utilisation

Définition 8 : ***Différence de vecteurs***

La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. On l'obtient en ajoutant à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$.

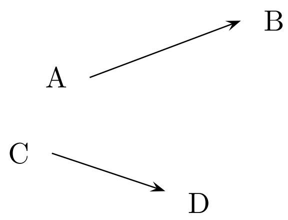
Exemples :

1. Construire $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

3. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$



4. Placer sur le même schéma le point M vérifiant $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$

Définition 9 : ***Produit d'un vecteur par un entier relatif***

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par k est noté $k\vec{u}$. Il est définit comme la somme du vecteur $\vec{u}$, k fois.
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par $-k$ est noté $-k\vec{u} = k(-\vec{u})$.

Remarque : Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- Ont la même direction.
- Sont de même sens si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$.
- Ont des normes telles que $||\vec{u}|| = |k|\vec{v}$ où $|k|$ désigne la valeur absolue de k, ie la distance à 0 du nombre k (c'est donc un nombre positif)

Dans ce cas, les droites portées par ces vecteurs sont parallèles (strictement ou confondues).

Exercice 8 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1.5 cm.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB}$
2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BC}$

Exercice 9 :

Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante, et illustrer chaque cas par un schéma :

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(a) $ABCD$ est un parallélogramme

(b) $ABDC$ est un parallélogramme

(c) D est le milieu de $[AB]$

(d) $ADBC$ est un parallélogramme

Exercice 10 :

Démontrer que pour tous points O, A et B on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle. Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
3. $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB}$
4. $\vec{t} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
5. $\vec{s} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$
6. $\vec{z} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ont-ils la même direction ? Justifier.

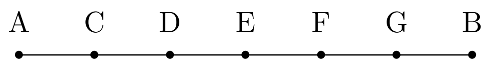
Exercice 12 :

Soient A et B deux points tels que $AB = 5$ cm et le point M défini par : $-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M

Exercice 13 :

Le segment $[AB]$ est divisé en six parties de même longueur.



Complélter les relations suivantes par :

La lettre qui convient :

1. $\overrightarrow{E\ldots} = -2\overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots G} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{AB} = -6\ldots\ldots$

Le nombre qui convient :

(a) $\overrightarrow{AB} = \ldots\overrightarrow{CE}$

(b) $\overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{BF}$

(c) $\overrightarrow{BF} = \ldots\overrightarrow{DE}$

3 Repérage

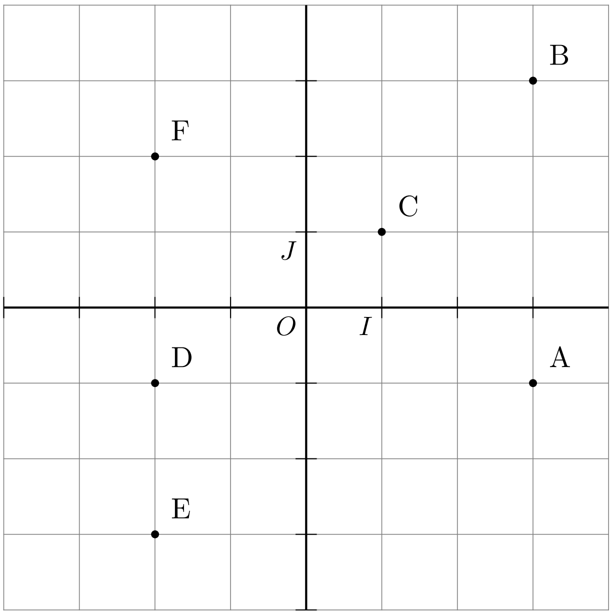
3.1 Milieu et distance

Travail de l'élève :

Partie A :

1. Euclide, auteur des *Elements de géométrie*, est né en -325 et mort en -265. A quel âge est-il mort ?
2. Calculer mentalement la somme, la différence et la moyenne des nombres 35 et -42.

Partie B : Soit le repère suivant :



1. Calculer les coordonnées des milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[AE]$ et $[AF]$.
2. Conjecturer une formule pour calculer les coordonnées du milieu d'un segment $[MN]$.
3. Calculer les longueurs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AE]$.
4. Conjecturer une formule pour calculer la longueur d'un segment $[MN]$.

Soient (O,I,J) un repère du plan, $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.

Propriété 4 :
Le point $M(x_M;y_M)$ est le milieu de $[AB]$ ssi $x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2}$.

Preuve :
1^{er} **cas** : Si $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$
On suppose par exemple que $y_A = y_B$ et $x_B > x_A$. Alors :

$$\begin{aligned} M(x_M;y_M) \text{ est le milieu de } [AB] &\iff y_M = y_A = y_B \text{ et } x_B - x_M = x_M - x_A \\ &\iff y_M = \frac{y_A+y_B}{2} \text{ et } x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \end{aligned}$$

La démonstration se traite de même si $x_B < x_A$ ou $x_B = x_A$.

Preuve (Suite) **:**

2^{eme} **cas** : Si $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$

On pose C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.

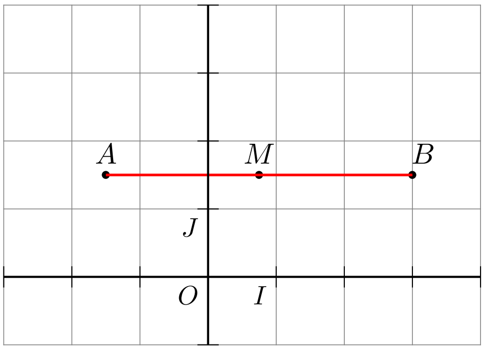
Soit K le milieu de $[AC]$. D'après le théorème des milieux, la droite (MK) est parallèle à (BC).

Donc $x_M = x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ d'après la partie 1.

De même, on pose L milieu de $[BC]$. On a $y_M = y_L = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

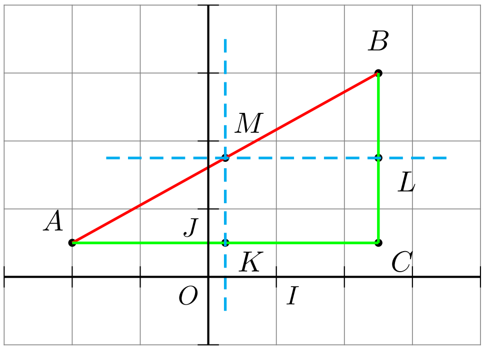
Exemples *:*

$A(-1.5; 1.5)$ et $B(3; 1.5)$



$M(0.75; 1.5)$

$A(-2; 0.5)$ et $B(2.5; 3)$



$M(0.25; 1.75)$

Propriété 5 :

Lorsque le repère (O, I, J) est orthonormé, on a : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Preuve **:**

On suppose que $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$. *Les autres cas se traitent de même.*

On note C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.

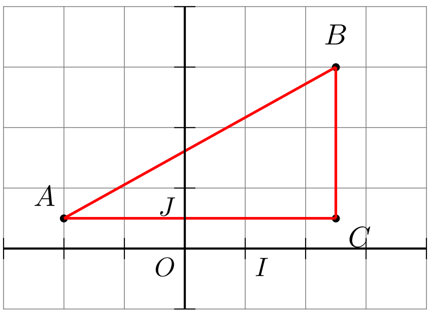
Dans le triangle ABC rectangle en C, on a d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, ie :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Comme AB est positif on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple *:*

$A(-2; 0.5)$ et $B(2.5; 3)$



$$AB = \sqrt{(2.5 - (-2))^2 + (3 - 0.5)^2} = \sqrt{4.5^2 + 2.5^2} = \sqrt{26.5} \simeq 5.1$$

Exercice 14 :

Dans un repère orthonormé du plan on donne les points $A\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$, $B\left(2;\frac{3}{4}\right)$, $C\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ et $D\,(2;-3)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu J de $[AB]$.
2. Les points B et C sont-ils symétriques par rapport au point A ?
3. Calculer la distance CD.

Exercice 15 :

Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ du plan on donne les points $A\,(2;5)$ et $B\,(-5;1)$.

1. Calculer les coordonnées du point M tel que O soit le milieu du segment $[AM]$
2. Calculer les coordonnées du point N tel que A soit le milieu du segment $[BN]$

Exercice 16 :

Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ du plan on donne les points $A\,(3;1)$, $B\,(2;4)$ et $C(-1;3)$

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[BC]$.
2. En déduire les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.

Exercice 17 :

Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ du plan on donne les points $A\,(-2;1)$, $B\,(2;-1)$ et $C(1;-3)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle. Préciser l'angle droit.

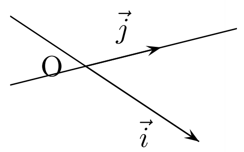
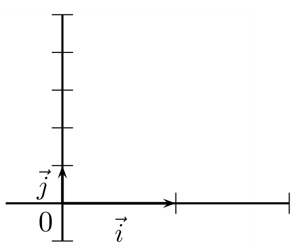
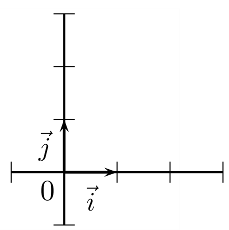
3.2 Coordonnées d'un vecteur

Soient (O,I,J) un repère du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Définition 10 :
La translation $t_{\vec{u}}$ associe au point O un unique point M.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M.

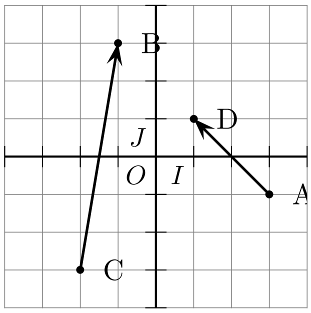
Remarques :

– On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
– Bien souvent, au lieu de noté $(O;I;J)$ un repère, on ne notera $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ Il s'agit d'un repérage en deux dimensions (évoquer la droite et l'espace).
– Rappel :

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormal
		
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de même norme

Exemple :

Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DA}$.



Propriété 6 :

Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

$$\vec{u}(x;y) = \vec{v}(x';y') \iff x = x \text{ et } y = y'$$

Preuve :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On pose $t_{\vec{u}}(O) = M$ et $t_{\vec{v}} = M'$.

Ainsi $\vec{u} = \vec{v}$ ssi $M = M'$, c'est-à-dire que M et M' ont les mêmes coordonnées. Autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.

Propriété 7 :

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Preuve :

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note M le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

Alors $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu I.

D'où $x_I = \dfrac{x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B}{2}$ et $x_I = \dfrac{x_A + x_M}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_M}{2}$.

On en déduit que $\dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B}{2} \iff x_A + x_M = x_B \iff x_M = x_B - x_A$.

De même on trouve $y_M = y_B - y_A$.

Donc $\overrightarrow{OM}(x_B - x_A; y_B - y_A)$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ on a aussi $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Exemple :

Soient $A(2;3)$ et $B(5;-4)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3;-7)$.

Propriété 8 :
Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur dans le repère **orthonormal** $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$$

En particulier : soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Exemple :
Dans l'exemple précédent, calculer les longueurs AB, AC et BC.

Exercice 18 :
Dans un repère, on donne $\vec{u}(2;3)$ et $A(-1;4)$.
Calculer les coordonnées du point B qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

3.3 Opérations et coordonnées

Propriété 9 :
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k un entier relatif. Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors :

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$
$k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$

Exemple :
Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(-3;1)$, $B(5;2)$ et $C(0;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = 5(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{OC})$
2. Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$

Exercice 19 :
Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(-2;4)$, $B(-3;5)$ et $D(4;6)$.
Déterminer les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme des deux façons suivantes :

1. Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Exercice 20 :
Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(2;-1)$, $B(3;4)$ et $C(-5;2)$.
Calculer les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Exercice 21 :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, soient les vecteurs $\vec{u}\,(-4;3)$ et $\vec{v}\,(1;-2)$ et le point $A(5;3)$. Déterminer les coordonnées $(x;y)$ du point M vérifiant $\overrightarrow{AM} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$

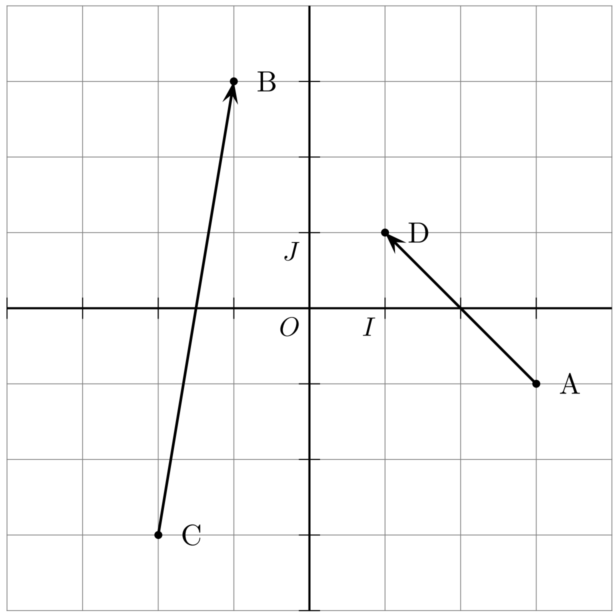
Exercice 22 :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, placer les points $A(-2;4)$, $B(4;2)$, $C(0;-1)$ et $D(-3;0)$. Soit E le milieu de $[AB]$. Déterminer la nature des quadrilatères $ABCD$ et $AECD$.

Les Annexes

Egalité de vecteurs

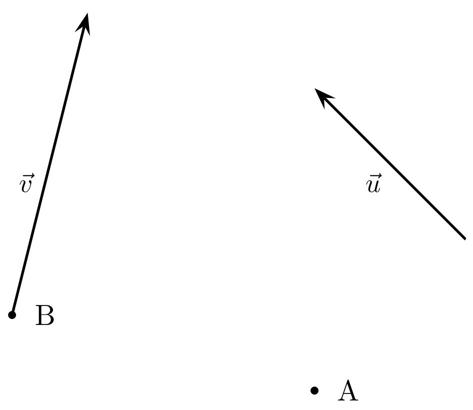
Ci-contre sont représentés deux vecteurs.



1. Calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{AD}$
2. Calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{CB}$
3. Placer F, l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
4. Donner la nature du quadrilatère $ADFC$.
5. Placer G, l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.
6. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AD}$

Somme de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A et B deux points du plan.



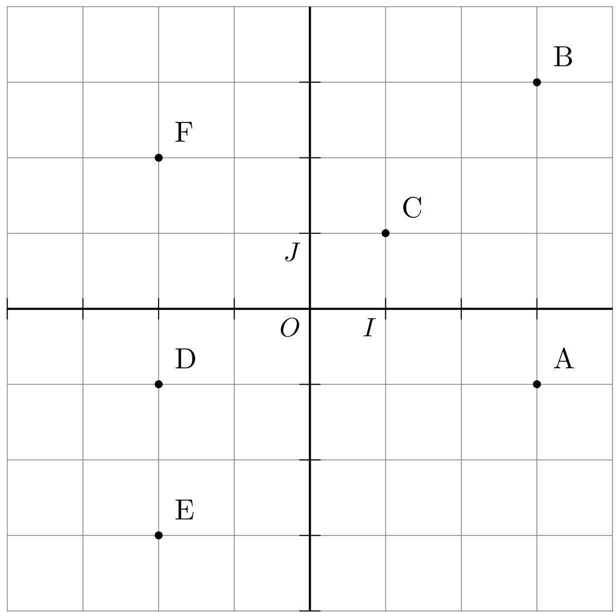
1. Construire A_1 et B_1 images respectives de A et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. Construire A_2 et B_2 images respectives de A_1 et B_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
3. Conjecturer la nature de la transformation f telle que $f(A) = A_2$ et $f(B) = B_2$.

Distance et milieux

Partie A :

1. Euclide, auteur des *Elements de géométrie*, est né en -325 et mort en -265. A quel âge est-il mort ?
2. Calculer mentalement la somme, la différence et la moyenne des nombres 35 et -42.

Partie B : Soit le repère suivant :



1. Calculer les coordonnées des milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[AE]$ et $[AF]$.
2. Conjecturer une formule pour calculer les coordonnées du milieu d'un segment $[MN]$.
3. Calculer les longueurs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AE]$.
4. Conjecturer une formule pour calculer la longueur d'un segment $[MN]$.

Exercices

Exercice 1 :

Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles de centre O et de diamètres respectifs $[PQ]$ et $[MN]$. Faire un schéma.
Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

Exercice 2 :

E, F, G et H sont quatre points tels que $(EF)//(GH)$ et $(EH)//(FG)$. Faire un schéma.
Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

Exercice 3 :

Placer trois points A, B et C non alignés.
Construire à la règle et au compas les parallélogrammes $ABCD$ et $ABDC$.

Exercice 4 :

Placer 4 points A, B, C et N non alignés.
Construire à la règle non graduée et au compas le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine C et celui d'extrémité N.

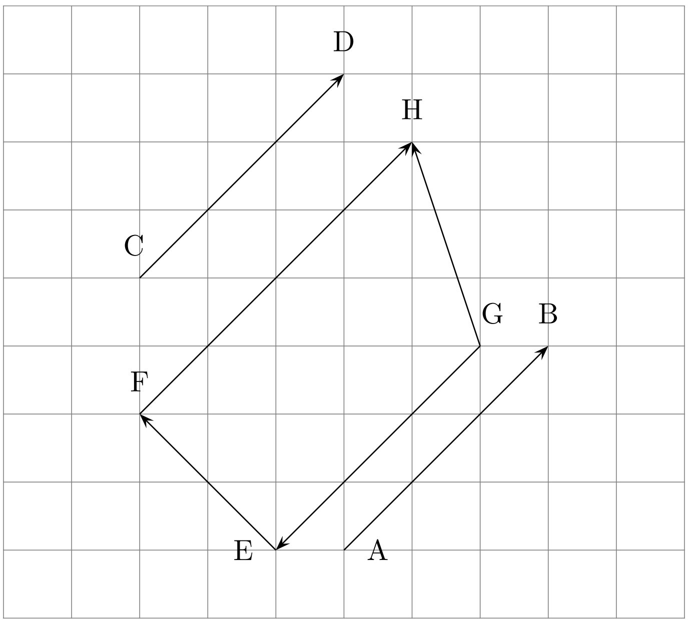
Exercice 5 :

A, B, O et O' sont quatre points distincts non alignés.
Soient C et D les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.
E et F les symétriques respectifs de A et B par rapport à O'.
Démontrer que $DCEF$ est un parallélogramme.

Exercice 6 :

Sur le dessin on a représenté six vecteurs.

1. Donner les vecteurs égaux, puis les vecteurs opposés.
2. Reproduire chacun des vecteurs avec pour origine le point F.



Exercice 7 :

$EFGH$ est un rectangle de centre I.

1. Construire le représentant d'origine G du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{FG}$.
2. Démontrer que $\vec{u} = \overrightarrow{EI}$.

Exercice 8 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1.5 cm.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB}$
2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BC}$

Exercice 9 :

Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante, et illustrer chaque cas par un schéma :

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(a) $ABCD$ est un parallélogramme

(b) $ABDC$ est un parallélogramme

(c) D est le milieu de $[AB]$

(d) $ADBC$ est un parallélogramme

Exercice 10 :

Démontrer que pour tous points O, A et B on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle. Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
3. $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB}$
4. $\vec{t} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
5. $\vec{s} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$
6. $\vec{z} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$

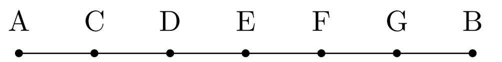
Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ont-ils la même direction ? Justifier.

Exercice 12 :

Soient A et B deux points tels que $AB = 5$ cm et le point M défini par : $-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$
Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M

Exercice 13 :

Le segment $[AB]$ est divisé en six parties de même longueur.



Complélter les relations suivantes par :

La lettre qui convient :

1. $\overrightarrow{E\ldots} = -2\overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots G} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{AB} = -6\ldots\ldots$

Le nombre qui convient :

(a) $\overrightarrow{AB} = \ldots\overrightarrow{CE}$

(b) $\overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{BF}$

(c) $\overrightarrow{BF} = \ldots\overrightarrow{DE}$

Exercice 14 :

Dans un repère orthonormé du plan on donne les points $A\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$, $B\left(2;\frac{3}{4}\right)$, $C\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ et $D\,(2;-3)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu J de $[AB]$.
2. Les points B et C sont-ils symétriques par rapport au point A ?
3. Calculer la distance CD.

Exercice 15 :

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ du plan on donne les points $A\,(2;5)$ et $B\,(-5;1)$.

1. Calculer les coordonnées du point M tel que O soit le milieu du segment $[AM]$
2. Calculer les coordonnées du point N tel que A soit le milieu du segment $[BN]$

Exercice 16 :

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ du plan on donne les points $A\,(3;1)$, $B\,(2;4)$ et $C(-1;3)$

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[BC]$.
2. En déduire les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.

Exercice 17 :

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ du plan on donne les points $A(-2;1)$, $B(2;-1)$ et $C(1;-3)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle. Préciser l'angle droit.

Exercice 18 :

Dans un repère, on donne $\vec{u}(2;3)$ et $A(-1;4)$. Calculer les coordonnées du point B qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Exercice 19 :

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points $A(-2;4)$, $B(-3;5)$ et $D(4;6)$.
Déterminer les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme des deux façons suivantes :

1. Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Exercice 20 :

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points $A(2;-1)$, $B(3;4)$ et $C(-5;2)$.
Calculer les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Exercice 21 :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soient les vecteurs $\vec{u}\,(-4;3)$ et $\vec{v}(1;-2)$ et le point $A(5;3)$.
Déterminer les coordonnées $(x; y)$ du point M vérifiant $\overrightarrow{AM} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$

Exercice 22 :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, placer les points $A(-2;4)$, $B(4;2)$, $C(0;-1)$ et $D(-3;0)$.
Soit E le milieu de $[AB]$. Déterminer la nature des quadrilatères $ABCD$ et $AECD$.

Devoir Maison n° 6

Exercice 1. (6 points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.

1. Construire à la règle non graduée et au compas le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ et le point N tel que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{0}$. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$
   En déduire la nature du quadrilatère $ABNI$

Exercice 2. (4 points)

ABC est un triangle avec $AB = 8$ cm

1. Placer le point E tel que :

   $$3\overrightarrow{EA} + 5\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}$$ *Justifier la position de E à l'aide d'un calcul vectoriel*

2. Démontrer que $3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} = 8\overrightarrow{CE}$

Exercice 3. (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ du plan on donne les points $A\,(3;1)$, $B\,(2;3)$, $C(-4;0)$ et $D(-3;-2)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme à l'aide de vecteurs.
2. Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
3. Calculer les coordonnées de son centre I.

Exercice 4. (5 points)

Soit $ABCD$ un parallèlogramme.

1. **Construire** à la règle non graduée et au compas les points F et E tels que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$
2. **Construire** le point G tel que $AEGF$ soit un parallèlogramme
3. **Démontrer** que $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AC}$
   Indication : On pourra introduire le point F dans le vecteur $\overrightarrow{AG}$
4. **Expliquer** alors pourquoi ceci implique que les points A, C et G sont alignés.