Chapitre 0 : Mise au point sur les nombres et le calcul

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 7 septembre 2009

Fiche rappels : Calcul numérique

<u>Définition</u> 1. Soient a un nombre et n un nombre entier positif.
- Si $n \geq 1$, alors $a^n = \underbrace{a \times a \times .... \times a}_{n\,\text{fois}}$ En particulier $a^1 = a$.
- Si $n = 0$ et $a \neq 0$ alors $a^0 = 1$

Si de plus $a \neq 0$, on définit le nombre a^{-n} comme l'inverse du nombre a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Propriété 1. Quels que soient les nombres a et b, et les entiers relatifs n et m, les égalités suivantes sont vérifiées, si elles sont définies :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

<u>Définition</u> 2. Si a est un nombre positif alors $\sqrt{a}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut a.

Propriété 2. Si a et b sont des nombres positifs et n un entier relatif, alors on a :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ si } b \neq 0 \qquad \sqrt{a}^n = \sqrt{a^n}$$

Attention !!. *En général* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Cas particulier : $\sqrt{a^2n} = \pm a^n$ suivant le signe de a.

Exemples : $5^{-4} = \dfrac{1}{\ldots\ldots} = \dfrac{1}{\ldots\ldots}$ $\quad (-3)^{-2} = \dfrac{1}{\ldots\ldots} = \dfrac{1}{\ldots\ldots}$ $\quad \sqrt{2} \times \sqrt{18} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad \sqrt{7 \times 21} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad \sqrt{(-5^6)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Fiches Rappels : Calcul littéral

Proposition 1. Pour tous nombres a, b et c on a : $a(b+c) = ab + ac$.
Développer une expression contenant des produits, c'est l'écrire en transformant les produits en sommes.
Ici c'est écrire le membre de gauche sous la forme du membre de droite : produit $\Rightarrow$ somme.
Réduire une expression développée c'est l'écrire sous forme de sommes contenant le moins de termes possible.
Factoriser une expression c'est l'écrire sous forme d'un produit.
Ici c'est écrire le membre de droite sous la forme du membre de gauche : produit $\Leftarrow$ somme.

Identités Remarquables : Pour tous nombres a et b on a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Définition 3. Une **équation** est une égalité dans laquelle figure une quantité inconnue (ou plusieurs). On désigne ces quantités par des lettres (x, y, ...)
Une **solution de l'équation**, c'est une valeur que prend la (ou les) quantités inconnues pour laquelle l'égalité est vérifiée. On note l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{solution1\,, solution2\,, \dots\}$.
Résoudre une équation c'est trouver toutes ses solutions (il est possible qu'il n'y en ait pas)

Proposition 2. Pour tous nombres a, b et c, avec $a \neq 0$, on a :

$$ax + b = c \quad \Longleftrightarrow \quad ax = c - b \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{c-b}{a}$$

Proposition 3. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Soient A et B des expressions : $\quad AB = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0$ ou $B = 0$

Introduction aux nombres

1 Mettre en équation

Dans l'antiquité, les mathématiques étaient surtout utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs cultivables, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions ... Cependant, ils servaient aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figurait une ou plusieurs quantités inconnues à trouver. Les mathématiciens parlaient de "chose" et tentaient de résoudre leurs problèmes en suivant un discours logique mais parlé, et peu clair pour nous aujourd'hui. De plus, ils ne cherchaient qu'à résoudre leur problème particulier, sans essayer de généraliser une méthode, et devaient recommencer depuis le départ à chaque nouveau problème.

Ce n'est qu'au $VIII^e$ siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie prit place peu à peu. Le point de départ fut de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre x) puis de mettre en équation les problèmes.
Rapidement, on comprit l'intérêt d'une méthode générale de résolution d'équations plutôt que de faire du cas par cas, et c'est Al-Khawarizmi qui le premier s'intéressa à cela. C'est de lui que vient le mot "algorithme" qui désigne aujourd'hui une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique. Grâce à ce principe, il suffisait de trouver l'algorithme à suivre pour résoudre son problème et de savoir interpréter la (les) solutions trouvées.

Jusqu'au début du XIX^e siècle, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développèrent la notation symbolique et la conventionnèrent. Par exemple, au XVI^e siècle Viete sépara l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utiliser de nos jours. On catégorisa les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnus, afin de généraliser le plus possible leur résolution déquations.

A travers cette recherche, on fut contraint de s'intéresser à la nature des nombres, et même d'en introduire de nouveaux.

Au départ, les gens connaissaient les nombres entiers positifs et les quatre opérations. Ils se retrouvaient donc confrontés à des équations dont les paramètres étaient des entiers positifs mais des solutions qui ne l'étaient pas forcément ... Observons cela plus en détails.

Travail de l'élève :

1. $3 - x = 1$ $\qquad \dfrac{x}{4} = 5$ $\qquad 2x + 3 = 5$ $\qquad 3x = 0$ $\qquad (x-3)(3x-6) = 0$
2. De quelle nature sont les nombres solutions des équations précédentes ?
3. Si on additionne deux entiers naturels, obtient-on un entier naturel ?
4. Si on soustrait deux entiers naturels obtient-on un entier naturel ?
5. Si on multiplie deux entiers naturels obtient-on un entier naturel ?
6. Si on divise deux entiers naturels obtient-on un entier naturel ?

Définition 4. L'ensemble des nombres entiers naturels se note $\mathbb{N}$ et désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$

Remarque : Le $\mathbb{N}$ vient de l'anglais *Natural*.

Travail de l'élève :

1. Résoudre les équations suivantes :

$$3 - x = -5 \qquad -\frac{x}{4} = 5 \qquad (2x+3)(x+1) + (2x+3)(x-1) = 0$$

$$3x - 12 = 9 \qquad (x-3)(3x-6) = 0 \qquad \frac{2x+4}{6x-2} = 0 \qquad x^2 - 1 = 0$$

   Rappel : Pour résoudre une équation produit, on utilise la règle : $A \times B = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$
2. De quelle nature sont les nombres solutions des équations précédentes ?
3. Si on additionne deux entiers relatifs, obtient-on un entier relatif ?
4. Si on soustrait deux entiers relatifs obtient-on un entier relatif ?
5. Si on multiplie deux entiers relatifs obtient-on un entier relatif ?
6. Si on divise deux entiers relatifs obtient-on un entier relatif ?

Définition 5. L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$ et représente l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs. $\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Remarque : Le $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand *Zahl*.

Propriété 3. Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On dit que $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, ou encore que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Travail de l'élève :

1. Résoudre les équations suivantes :

$$3-2x=-5 \qquad -\frac{x}{4}=2 \qquad (2x+3)(x+1)+(2x+3)(3x-7)=0 \qquad \frac{2x+1}{6x-2}=0$$

2. De quelle nature sont les nombres solutions des équations précédentes ?
3. Si on additionne deux nombres rationnels, obtient-on un nombre rationnel ?
4. Si on soustrait deux nombres rationnels obtient-on un nombre rationnel ?
5. Si on multiplie deux nombres rationnels obtient-on un nombre rationnel ?
6. Si on divise deux nombres rationnels obtient-on un nombre rationnel ?

Définition 6. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et représente l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Remarque : $b \in \mathbb{Z}^*$ car on ne peut pas diviser par 0.

Remarque : Le $\mathbb{Q}$ vient du latin *Quotiente*

Propriété 4. Tous les entiers relatifs a peuvent s'écrire $a = \frac{a}{1}$, donc sont des rationnels. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

.

$\mathbb{Q}$ est stable pour toutes les opérations. On aurait pu s'arrêter là, cependant, les mathématiciens connaissent d'autres nombres comme π (grâce aux cercles) et $\sqrt{2}$ (grâce au théorème de Pythagore) et il a déjà été démontré que $\sqrt{2}$ ne pouvait pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers (donc encore moins sous la forme d'un entier !). De plus, il restent des équations telles que $x^2-5=0$ dont les solutions ne font pas partie de cet ensemble.
Exemples : Π et $\sqrt{2}$ n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$. On dit qu'ils sont **irrationnels**.

Définition 7. L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$ et représente l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels. Il contient tous les nombres connus en classe de seconde.

Remarque : Le $\mathbb{R}$ vient de l'anglais *Real*

Propriété 5. Tous les nombres rationnels sont réls. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemples : Donner tous les ensembles de nombes auxquels appartiennent les nombres suivants :

$$3 \qquad -6 \qquad \frac{4}{3} \qquad -\frac{1}{3} \qquad \pi \qquad \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Remarque : $\mathbb{R}$ n'est encore pas assez grand pour résoudre toutes les équations. Par exemple $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, on note $S = \varnothing$. Cet ensemble s'appelle l'ensemble vide et ne contient aucun élément.
Cette équation a pourtant une solution dans un ensemble contenant $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{C}$ et appelé l'ensemble des nombres complexes, étudié en classe de terminale S.

$$\mathbb{C} = \left\{a + ib/a \in \mathbb{R}\,;\, b \in \mathbb{R}\, et\, i^2 = -1\right\}$$

Il a été démontré que $\mathbb{C}$ contenait l'ensemble des solutions des équations construites à partir de cet ensemble.

Question : À quel ensemble appartiennent les nombres décimaux ?

Résumé :
L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls se note $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les entiers naturels.

L'ensemble des entiers positifs et négatifs se note $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Les élémlents de $\mathbb{Z}$ sont les entiers relatifs.

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers se note $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les nombres rationnels.

L'ensemble des nombres connus en seconde (rationnels et irrationnels) s'appelle l'ensemble des nombres réels. On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Intervalles

Définition 8. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$. On le note $[a; b]$.
a et b sont les bornes de l'intervalle $[a; b]$.

Remarque : On dit qu'un intervalle est borné si et seulement si ses deux bornes sont finies (ie réels).

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a; +\infty[$	Intervalle fermé
		$]a; +\infty[$	

Remarque : On note :

- $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$
- $\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$
- $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$
- $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Exemples :

1. Donner les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :

$$-6 \leq x \leq 7 \qquad -5 < x \qquad x \leq 3$$

2. Donner les inégalités correspondant aux intervalles suivants :

$$\left]\frac{1}{3}; \sqrt{7}\right] \qquad \left[-\sqrt{5}; +\infty\right[$$

Résumé :
L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls se note $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les entiers naturels.

L'ensemble des entiers positifs et négatifs se note $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Les élémlents de $\mathbb{Z}$ sont les entiers relatifs.

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers se note $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les nombres rationnels.

L'ensemble des nombres connus en seconde (rationnels et irrationnels) s'appelle l'ensemble des nombres réels. On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle borné	Dénomination
$a \leq x \leq b$			
			Intervalle ouvert
			Intervalle semi-ouvert à droite
			Intervalle semi-ouvert à gauche

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle	Dénomination
$x \geq a$		$[a; +\infty[$	Intervalle fermé
		$]a; +\infty[$	