Chapitre 3 : Étude qualitative de fonctions

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 23 novembre 2009

Table des matières

Cours : Étude qualitative de fonctions

Rappels

<u>*Travail de l'élève*</u> *:* Tout français possède un numéro de INSEE. Sa construction cache-t-elle une fonction ?

Comportant 13 chiffres depuis 1945, le numéro attribué par l'INSEE (Institut National de la Statistique et des données Économiques) à chaque Français à sa naissance nous permet de faire valoir nos droits aux prestations de la Sécurité Sociale. Depuis l'informatisation, dans les années 1970, ce numéro est suivi d'une clé de contrôle : le reste de la division euclidienne par 97 du nombre à 13 chiffres. Chacun d'entre nous est donc identifié par un numéro à $13 + 2$ chiffres définis comme suit :
- Le premier chiffre donne le sexe : 1 pour masculin, 2 pour féminin ;
- Les deux suivants l'année de naissance ;
- Les deux suivants le mois de naissance ;
- Les deux suivants le numéro du département de naissance ;
- Les trois suivants, le code INSEE de la ville dans ce département ;
- Les trois suivants l'ordre d'arrivée dans l'année du bébé dans la commune.
- Les deux derniers la clé de contrôle

Voici quelques codes INSEE de villes : Besanqn : 056 ; Albi : 004 ; Dieppe : 217 ; Bordeaux : 063

1. Donner le numéro INSEE de Bernard, né le 22 janvier 1972, à Besançon. C'était la 25^{eme} naissance dans cette ville.
2. Donner les caractéristiques de la personne dont le numéro INSEE est 2 98 11 33 063 057. Trouver la clé de contrôle de ce numéro.
3. Si l'on associe à chacun d'entre vous son propre numéro INSEE, peut-on parler de fonction ?
4. Si oui, la définir comme fonction d'un ensemble de départ A vers un ensemble d'arrivée B à préciser.
5. Risque-t-on d'avoir deux personnes distinctes ayant un même numéro INSEE ? Y a-t-il un ordre sur les numéros INSEE ?

Définition 1. Une fonction est une relation associant des éléments d'un ensemble de départ E à *au plus* un élément d'un ensemble d'arrivée F.
Lorsqu'une fonction f associe à l'élément $X \in E$ un élément de l'ensemble F, on note $f(X)$ cet élément. On note $f : X \longmapsto f(X)$.

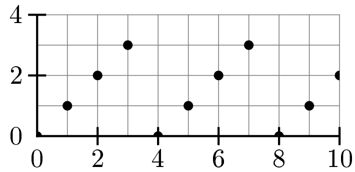
Exemples :

– Le chemin le plus court pour aller d'un point A vers un point B

$$\begin{array}{rcl} chemin : & (\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots) & \longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\ldots\ldots, \ldots\ldots) & \longmapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

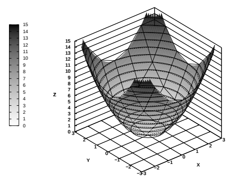
– La fonction r qui à tout entier naturel n associe son reste dans la division euclidienne par 4

$$\begin{array}{rcl} r : & \ldots\ldots & \longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots & \longmapsto \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$



– La fonction g qui à deux nombres réels x et y associe la somme de leur carré $x^2 + y^2$

$$\begin{array}{rcl} g : & (\ldots\ldots, \ldots\ldots) & \longrightarrow \ldots\ldots \\ & (\ldots\ldots, \ldots\ldots) & \longmapsto \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$



Définition 2. Soit f est une fonction d'une variable et a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $f : a \mapsto b$.
On appelle **image de** a par f le réel $b = f(a)$. On dit que a est un **antécédent de** b par f.

Remarques :

– Un réel a ne peut avoir que 0 ou 1 image. Un réel b peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.
– Une courbe ne peut alors être représentive d'une fonction que si elle « ne fait pas demi-tour »ou n'est jamais verticale. En fait c'est la seule condition (la courbe peut être en plusieurs morceaux).
– Sur un graphique, on lit les images $f(x)$ sur l'axes des ordonnées (vertical) et les éventuels antécédents x sur l'axe des abscisses (horizontal).

Définition 3. Lorsqu'un élément a de E n'a pas d'image, on l'appelle valeur interdite.
L'ensemble de définition d'un fonction f est l'ensemble des réels ayant une image par f, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites.

Remarques :

– Pour calculer les valeurs interdites d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$, il faut trouver les valeurs de x pour lesquelles
  a) on diviserait par 0 dans l'expression $f(x)$
  b) on prendrait la racine carrée d'un nombre négatif dans l'expression $f(x)$

– Pour lire les valeurs interdites d'une fonction sur un graphique, on regarde les abscisses (sur l'axe horizontal) où il n'y a pas de courbe tracée.

Application 1. On lance un caillou du haut d'un bâtiment avec une vitesse initiale et on mesure sa vitesse en fonction du temps t. À toute valeur de t on fait correspondre la vitesse $v(t)$ exprimées en m.s^{-1}. On note $\ldots : \ldots \mapsto \ldots\ldots$ et on donne le tableau de valeurs suivant :

T (en secondes)	0	1	2	3	4	5	6
$v(t)$ (en mètres par seconde)	2	11.81	21.62	31.43	41.24	0	0

1. Sachant que v est affine sur $[0;5[$, trouver la formule utilisée par les physiciens sur $[0;5[$.
2. Décrire alors l'expression de v sur $\mathbb{R}$ par un algorithme, comme un informaticien.
3. On peut également tracer un graphique représentant la vitesse en fonction du temps.
   Le faire avec comme unité graphique 1 cm = 1 s et 1 cm = 10 m.s^{-1} suivant les axes.
4. Grâce au tableau de valeur donner l'image de 2 et un antécédent de 11.81
5. Grâce au tableau de valeur donner l'image de 0 et un antécédent de 0. Que constate-on ?
6. Grâce au tableau de valeur pouvez-vous donner l'image de 2.5 et un antécédent de 5 ?
7. Cela signifie-t-il que 2.5 n'a pas d'image et 5 pas d'antécédent ?
8. Proposer deux autres méthodes pour répondre à la question 6 et les faire.
9. Tous les nombres ont-ils une image par v ? Pourquoi ? Comment cela se voit-il sur la courbe ? Sur le tableau ?
10. On donne deux instants $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$. Sans calculer les vitesses du caillou à ces moments, pouvez-vous les comparer ?

1 Variations

1.1 Sens de variation

Travail de l'élève : Le graphique ci-dessous donne le niveau de la mer en mètres dans le port de Narbonne pendant 12h.

1. Cette courbe est-elle la courbe représentative d'une fonction ?

   On note f la fonction niveau de la mer en fonction du temps t.

2. (a) D'après le graphique, déterminer les intervalles de temps sur lesquels le niveau de la mer monte.

   (b) Pour tout t_1, t_2 appartenant à l'un de ces intervalles et tels que $t_1 < t_2$, que peut-on dire sur l'ordre de $f(t_1)$ et $f(t_2)$? Sur les intervalles .... et .... la fonction f .... l'ordre.

3. (a) D'après le graphique, déterminer l'intervalle de temps sur lequel le niveau de la mer descend.

   (b) Sur chacun de ces intervalles de temps, comment traduire ce phénomène à l'aide de la fonction f ?

   Sur .... et .... la fonction f .... l'ordre.

Attention ! !

4. (a) Soit g la fonction définie sur un intervalle I contenant les réels 4 et 7 telle que $g(4) > g(7)$. Peut-on conclure que la fonction g est inverse l'ordre sur l'intervalle $]4; 7[$?

   (b) Que faut-il préciser en plus pour conclure sur ce sujet pour la fonction g ?

A faire plus tard, dans la partie sur les extrema

5. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur maximale de la mer ?

   (b) Pour quelle valeur de t ce maximum est-il atteint ?

   (c) Est-ce un maximum absolu ?

6. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur minimale de la mer ?

   (b) Pour quelle valeur de t ce minimum est-il atteint ?

   (c) Est-ce un minimum absolu ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

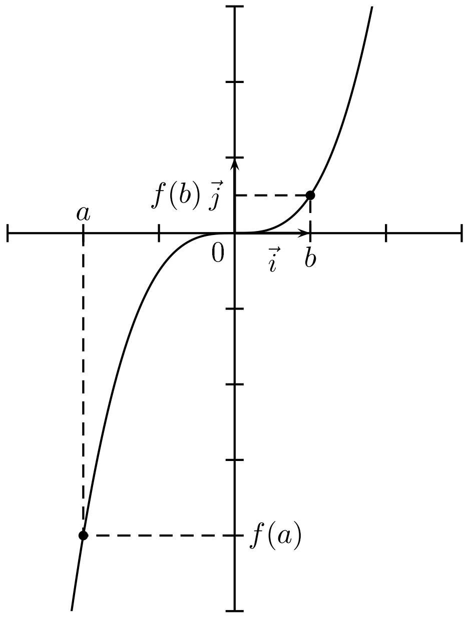
Définition 4. On dit que f est strictement croissante si pour tous réels a et b de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans le même ordre.
Autrement dit :

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

Remarques :

- Si on a seulement $a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$, c'est-à-dire que l'ordre est conservé avec possible cas d'égalité, alors on dit simplement que f est croissante.
- Antécédents et images sont rangés dans le même ordre. On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

Exemple :



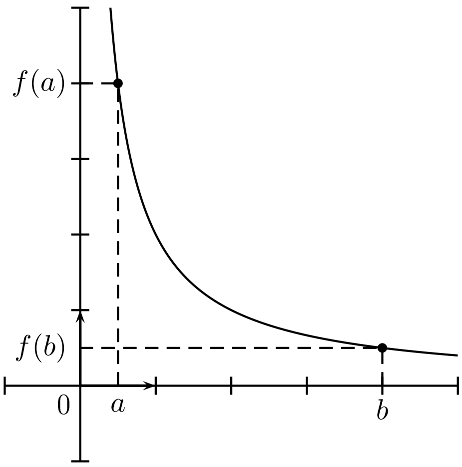
Définition 5. On dit que f est strictement décroissante si pour tous réels a et b de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans l'ordre inverse.
Autrement dit :

$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$

Remarques :

- Si on a seulement $a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$, c'est-à-dire que l'ordre est inversé avec possible cas d'égalité, alors on dit simplement que f est décroissante.
- Antécédents et images sont rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

Exemple :



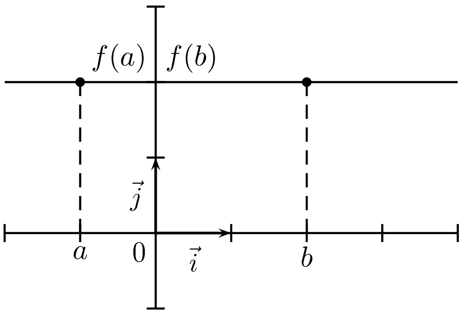
Remarques :

- On ne parle de fonction croissante ou décroissante que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.
- On parle de fonction **monotone** sur un intervalle I si celle-ci y est soit croissante, soit décroissante.

<u>Définition</u> 6. On dit que f est constante si pour tous réels a et b de I, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont égales.
Autrement dit :

$$a < b \Longrightarrow f(a) = f(b)$$

Exemple :



Remarque : La représentation graphique d'une fonction constante égale à c est une droite parallèle à l'axe des ordonnées déquation $y = c$.

Remarques :

- Si on sait qu'une fonction f est strictement monotone sur un intervalle I alors pour tous nombres a et b connus on peut connaître l'ordre de leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sans les calculer.
- Si on connait l'ordre deux de nombres a et b d'un intervalle I et l'ordre de leurs images $f(a)$ et $f(b)$, on ne peut rien dire sur le sens de variation de f (on ne sait pas ce qui se passe pour les autres réels de I).

<u>Exercices du livre</u> : 41 − 42 − 43 − 44 − 45 p 86 + 49 à 51 p 87

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Montrer par le calcul que f est croissante.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 5$. Montrer par le calcul que g est décroissante.

1.2 Tableau de variations

Travail de l'élève : Etudier les variations d'une fonction consiste à dire sur quel(s) intervalle(s) elle est croissante, décroissante ou constante. On regroupe ces informations dans un tableau, appelé **tableau de variations**. Voici un exemple :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
Sens de variation de f		$\searrow$	6	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

1. (a) Deviner les variations de f à partir de ce tableau.
   (b) Ce tableau contient-il d'autres informations sur f ? Si oui, les donner.
   (c) A quel intervalle de la première ligne du tableau appartiennent les nombres -5 et -3 ?
   (d) Quel est le sens de variation de f sur cet intervalle ?
   (e) Dans quel ordre sont rangés les images de -5 et -3 ?
   (f) Dans quel ordre sont rangés les images de 5 et 100 ?
   (g) Dans quel ordre sont rangés les images de 0 et 5 ?
2. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction g, strictement croissante sur $[-4; 0]$ de 0 à 3, strictement décroissante sur $[0; 6]$ de 3 à -5 et constante sur $]6; +\infty[$ égale à -5.
   (b) Quelle est l'image de 0 ? Celle de 100 ?
   (c) Donner les éventuels antécédents de 0 ? de 3 ? de -5 ?
   (d) Dans quel ordre sont rangés les images de -3 et -0.5 ?
   A quel intervalle appartiennent-ils ?
   (e) Dans quel ordre sont rangés les images de 0.5 et 3 ?
   A quel intervalle appartiennent-ils ?
   (f) Dans quel ordre sont rangés les images de -0.5 et 3 ?
   A quel intervalle appartiennent-ils ?
   (g) On sait que les images de deux nombres a et b sont $f(a) = -1$ et $f(b) = -4$.
   Dans quel(s) intervalle(s) du tableau se situent a et b ? Donner leur ordre si c'est possible.
   (h) On sait que les images de deux nombres c et d sont $f(a) = 1$ et $f(b) = 2$.
   Dans quel(s) intervalle(s) du tableau se situent a et b ? Donner leur ordre si c'est possible.
   (i) Donner tous les nombres dont l'image est supérieure à -5.
   (j) On donne de plus comme informations : $f(-3) = f(1) = 2$.
   Donner tous les nombres dont l'image est inférieure à 2.
   (k) Dessiner une représentation graphique compatible avec ce tableau de variations.
3. **À faire plus tard**
   (a) Donner le maximimum et le minimum de la fonction g sur son ensemble de définition en précisant quand ils sont atteints.
   (b) Peut-on donner le maximimum et le minimum de la fonction f sur son ensemble de défintion ? Sur $]-\infty; 4]$?

Quelques règles pour dresser un tableau de variations d'une fonction :
Sur la ligne des x, on met toutes les valeurs remarquables, à savoir :

- les valeurs extrêmes de l'ensemble de définition
- les valeurs interdites
- les valeurs où la fonction change de sens de variation

Sur deuxième ligne, on représente le sens de variation d'une fonction sur les intervalles de x considérés par des flèches signifiant que la fonction est strictement croissante, décroissante ou constante.
Les valeurs interdites sont précisées par une double-barre verticale.
Quand on peut les calculer, on écrit la valeur des images $f(x)$ des x remarquables de la ligne du dessus.
Exercices du livre : 48 p 87, 70 p 91, 74-75 p 91, 89 p 92

Exercice 1. Soit z la fonction définie par $z(x) = \dfrac{3}{x-3}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Quelles sont les images de 6 ? 4 ? 0 ?
3. Quels sont les antécédents de 12 ? 8 ?
4. Après avoir tracer cette fonction sur votre calculatrice, décrire les variations de z.
5. Résumer cela dans un tableau de variations de z.
6. Tracer la courbe représentative de z.

2 Extrema

<u>*Travail de l'élève :*</u> Fin des activités sur les variations et sur les tableaux de variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

> **<u>Définition</u> 7.** On dit que f admet un maximum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$.
> $f(a)$ est le maximum de f sur I, atteint en a.

Exemple : Quel est le maximum de la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = -x^2 + 3$?
Pour tout x on a $-x^2 \leq 0 \iff -x^2 + 3 \leq 3 \iff t(x) \leq t(0)$.
Donc le maximum de t est 3, atteint en $x = 0$

> **<u>Définition</u> 8.** On dit que f admet un minimum en a si, pour tous réels $x \in I$ on a : $f(x) \geq f(a)$.
> $f(a)$ est le minimum de f sur I, atteint en a.

Exemple : Quel est le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^2 - \sqrt{3}$?
Pour tout x on a $x^2 \geq 0 \iff x^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \iff v(x) \geq v(0)$.
Donc le minimum de v est $\sqrt{3}$, atteint en 0 (pour $x = 0$.

Remarque : On parle d'extremum lorsque la fonction admet soit minimum, soit maximum.

<u>Exercices du livre</u> : $39 - 40$ p 86 + $46 - 47$ p 87 + 54 p 88

<u>Exercice</u> 2. Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur un intervalle $[-1; 3]$:

x	-1		0		1		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

1. Lire $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(3)$
2. Quel est le maximum de f sur $[-1; 3]$? Quand est-il atteint ?
3. Quel est le minimum de f sur $[-1; 3]$? Quand est-il atteint ?
4. Pour $x \in [0; 1]$, encadrer $f(x)$
5. Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[-1; 3[$.
6. Encadrer $f(-0,5)$, $f(0,8)$ et $f(2,1)$

<u>Exercice</u> 3. Soit la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -(x-2)^2 + 3$

2. En déduire le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f(0)$ et $f(10)$
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[-2; 5]$
5. Compléter le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\cdots$	$\searrow$

6. Grâce au tableau de variation, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
7. Grâce à la courbe résoudre graphiquement cette équation.
8. Par dichotomie, donner un encadrement à 10^{-2} de ces solutions.
9. Retrouver ces nombres par le calculs
10. Vérifier la cohérence des trois méthodes.

<u>Exercices du livre</u> : 69 – 81 – 83 – 84 p 91 + 88 p 92

<u>Exercice</u> 4.

1. Dresser son tableau de variations de la fonction « carré »à partir de sa courbe représentative sur votre calculatrice
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $x^2 \leq 3$
3. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $x^2 \geq 2$
4. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $1 \leq x^2 \leq 5$

<u>Exercice</u> 5.

1. Dresser son tableau de variations de la fonction « inverse »à partir de sa courbe représentative sur votre calculatrice
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$
3. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement -1 $\leq \dfrac{1}{x} \leq -\dfrac{1}{4}$
4. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $-\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$

3 Problèmes de synthèse

Résoudre des problèmes concrets se déroule en 3 étapes :

1. La modélisation : traduire le problème en termes mathématiques
2. La résolution (grâce à tous les outils mathématiques appris jusqu'à aujourd'hui)
3. L'interprétation des résultats

Seul le point 2. relève vraiment des mathématiques. Le reste fait surtout appel à votre maîtrise du français et votre bon sens.

La résolution mathématique peut se faire sous plusieurs points de vue :

- Algébrique (calculatoire)
- Fonctionnelle (grâce aux fonctions et leurs propriétés)
- Graphique (lecture)
- Géométrique (on pourra alors utiliser des logiciels adaptés, tels que Géogébra)

Pour résoudre une (in)équation, vous possédez à ce jour plusieurs méthodes :

- **Par le calcul** : on écrit une succession d'égalités équivalentes ($\Longleftrightarrow$) jusqu'à trouver toutes les solutions.
  Avantage : on trouve les solutions exactes,
  Inconvénients : vous ne savez à ce jour que résoudre des (in)équations se ramenant au 1er degré, des équations produit, des équations quotient. Les inéquations produit et quotients seront apprises bientôt. Mais il manque encore bien d'autres types d'(in)équations.
- **Par lecture graphique** : On trace la courbe représentative d'une fonction adéquate et lit sur l'axe des abscisses les éventuelles solutions
  Avantages : Rapide et simple
  Inconvénients : Peu précis, et non exhaustif (le graphique ne représente qu'une partie de la courbe en général)
- **Par le tableau de variation et dichotomie** : grâce au tableau de variation on peut trouver le nombre de solutions d'équations et par dichotomie on peut les encadrer aussi précisément que voulu. On peut alors en déduire des solutions approchées pour des inéquations.
  Avantages : Exhaustif et plus précis que la lecture graphique
  Inconvénients : Solutions approchées en général

Le point sur la dichotomie

Pour utiliser la dichotomie pour encadrer les solutions $f(x) = k$ à 10^{-2} près, il faut d'abord déterminer un intervalle borné $[a; b]$ tel que :

- f soit monotone sur cet intervalle
- Si f est croissante $f(a) < k$ et $f(b) > k$
- Si f est décroissante $f(a) > k$ et $f(b) < k$

Une fois que l'on a l'intervalle et le sens de variation de f sur cet intervalle, on peut suivre l'algorithme :

Si f est croissante :
- Soit $i = 1$
- On pose $a_i = a$ et $b_i = b$
- Tant que $b_i - a_i \geq 10^{-2}$:
  - Calculer m_i la moyenne de a_i et b_i
  - Calculer $f(m_i)$.
  - Si $f(m_i) > k$ alors $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = m_i$ Sinon $a_{i+1} = m_i$ et $b_{i+1} = b_i$
  - Incrémenter i (ajouter 1 à la valeur de i)
  - Fin de la boucle « Tant que »
- On a que la solution $x \in [a_i; b_i]$.

Si f est décroissante :
- Soit $i = 1$
- On pose $a_i = a$ et $b_i = b$
- Tant que $b_i - a_i \geq 10^{-2}$:
  - Calculer m_i la moyenne de a_i et b_i
  - Calculer $f(m_i)$.
  - Si $f(m_i) < k$ alors $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = m_i$ Sinon $a_{i+1} = m_i$ et $b_{i+1} = b_i$
  - Incrémenter i
  - Fin de la boucle « Tant que »
- On a que la solution $x \in [a_i; b_i]$.

3.1 Quelques exercices théoriques

<u>Exercice</u> 6. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x \qquad h(x) = x - 3$$

1. Etablir un tableau de valeurs pour les trois fonctions, allant de -2 à 4, de pas 0.5.
2. Tracer dans un même repère les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ respectivement des fonctions f, g et h sur $[-2; 4]$.
   Conseils :
   (a) On graduera l'axe des abscisses de -2 à 4 en prenant 2 cm par unité
   (b) On graduera l'axe des ordonnées de -5 à 5 en prenant 1 cm par unité
3. Est-il vrai que le point de coordonnées $(0.5; -1.3)$ appartient à $\mathscr{C}_g$? Justifier.
4. Soit a un nombre compris entre -2 et -1. Donner un encadrement de $g(a)$ et un de $h(a)$.
5. À l'aide des graphiques, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$
6. Comparaison des fonctions f et g
   (a) À l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :
      i. Combien y a-t-il de points d'intersections entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

ii. Quelles sont leurs coordonnées ?

(b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par le calcul :

i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

ii. En déduire, par le calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

(c) Sur quel(s) intervalle(s) a-t-on $f \leq g$?

Exercice 7. On se donne la fonction h définie par $h(x) = (3x-5)^2 - 16$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction h ?
2. Calculer l'image de 0 et de 3 par h.
3. Calculer la valeur exacte de $h(\sqrt{2})$ (calculs détaillés).
4. Donner un encadrement à 10^{-1} par dichotomie des solutions de l'équation $h(x) = 0$.
5. (a) Factoriser l'expression de $h(x)$

   (b) En déduire par le calcul les éventuels antécédents de 0 par h.

   (c) Avec votre calculatrice graphique, dire pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle positive ?
6. Déterminer s'ils existent, les antécédents de -16 et de -25 par h.
7. (a) Montrer que, pour tout réel x, on a $h(x) = 9x^2 - 30x + 9$.

   (b) En déduire par le calcul les éventuels antécédents de 9 par h.

3.2 Recherche d'ombre maximale

Simone veut se construire un parasol pour chez lui. Elle décide de prendre le tissu de sa planche à voile pour éviter toute couture. Elle accroche un sommet à dans l'angle de sa terrasse, un autre sur une barre de 5 m le long d'un mur et accroche le dernier sommet de sa voile sur un arceau métallique en forme de quart de cercle, installé par ses soins. Ceci lui permet de faire coulisser sa voile pour avoir le plus d'ombre possible, à tout moment de la journée.

Le but du problème *est de trouver la surface maximale d'ombre que Simone peut avoir à midi.*

Modélisation de la situation : On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $OI = 5$. M est un point quelconque de ce quart de cercle, H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO. On cherche où placer M pour que l'aire du triangle OHM soit maximale.

1. **Réaliser la figure et rédiger une conjecture :**

   (a) Faire un schéma de la situation à la main.

   (b) Préciser dans l'ordre les constructions que vous venez de réaliser pour faire la figure.

   (c) Rédiger le programme de construction de la figure sous Géogébra (décrire les étapes).

   (d) Réaliser ce programme et **appeler le professeur** pour qu'il valide la figure.

   (e) Réaliser les mesures nécessaires pour répondre au problème.

   (f) Rédiger alors une conjecture graphique et **appeler le professeur**.

2. **Étude graphique fonctionnelle du problème :**
   L'aire du triangle OMH dépend de la distance OH. On souhaite tracer la courbe représentative de l'aire de OMH en fonction de la distance OH.
   (a) Créer un tableau de valeurs donnant l'aire de OMH en fonction de OH.
   (b) Sur le même graphique, construire le point N qui a la même abscisse que H et dont l'ordonnée est l'aire de OHM.
   (c) Tracer la courbe en utilisant la commande "courbe : = lieu (point sur la courbe, point mobile dont il dépend)".
   Êtes vous certains d'avoir tracé la bonne courbe ? Justifier. **Appeler le professeur**.
   (d) Par lecture graphique, déterminer les valeurs de OH pour lesquelles le triangle OMH mesure 4 unités d'aire.
   (e) Décrire les variations de la courbe par lecture graphique.
   (f) Déterminer alors la position du point H qui donne la plus grande aire du triangle OMH
   (g) Déterminer l'aire maximale du triangle OMH
   (h) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux trouvés précédemment ?
   (i) A-t-on trouvé la valeur exacte de la solution du problème ? **Appeler le professeur**.
3. **Réponse au problème de Simone**
   (a) Où Simone doit-elle mettre ses sommets mobiles de voile pour avoir $4m^2$ d'ombre ?
   (b) Où Simone doit-elle mettre ses sommets mobiles de voile pour avoir le maximum d'ombre ? Quelle surface d'ombre a-t-elle alors à disposition ?
4. **Rédiger toutes les questions manuscrites sur feuille pour vendredi prochain.**

3.3 Recherche d'une surface minimale

Norbert veut se faire une nappe orgininale en forme de parallélogramme pour l'anniversaire Simone. Il a donc acheté un morceau rectangulaire de tissu. La taille suffisante pour que tout parallélogramme inscrit dedans recouvre sa table (4×2.5 m). Norbert compte utiliser les pans restant pour faire des serviettes triangulaires pour sa femme et leurs deux enfants. Il souhaite alors découper une nappe avec la plus petite surface possible, afin d'avoir des serviettes les plus grandes possibles.

Le but du problème *est de trouver où Norbert doit découper sa nappe.*

Modélisation de la situation : On considère un rectanle $ABCD$ de longueur $AB = 8$ cm et de largeur $AD = 5$ cm. Soit un point M quelconque sur $[AB]$. On définit alors N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que $AM = BN = CP = DQ$.
On cherche où placer M pour que l'aire de $MNPQ$ soit minimale.

1. **Découverte de la situation**
   (a) Faire la figure. $MNQP$ est-il bien un parallélogramme ? Justifier
   (b) Avons-nous tous la même aire pour $MNPQ$?
2. **Calcul de l'aire**
   (a) Calculer l'aire de $MNPQ$ pour $AM = 2$, $AM = 3$ et celle de votre parallélogramme.

(b) En fonction de quelle grandeur l'aire de $MNPQ$ varie-t-elle ?

(c) Quelle est l'aire de $MNPQ$ la plus grande possible ?

(d) Est-il possible que l'aire de $MNPQ$ soit égale à $23.08\,cm^2$? Si oui, pour quelles valeurs de AM ? Que vaudrait alors l'aire de la nappe ? *(Rédiger l'algorithme utilisé pour répondre)*

3. **Approche fonctionnelle**

(a) On pose $AM = x$. Trouver l'expression de $\mathscr{A}(x)$ de l'aire de $MNPQ$ en fonction de x.

(b) Donner l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$

(c) Tracer la courbe représentative de $\mathscr{A}$

(d) Dresser alors le tableau de variation de $\mathscr{A}$

(e) Conjecturer la réponse au problème (attention à l'échelle !).

4. **Avec un logiciel**

(a) Réaliser la figure avec Géogébra

(b) Faire afficher la longueur x et l'aire $\mathscr{A}(x)$

(c) Déplacer le point M sur $[AB]$: observer les variations de l'aire et tenter de la rendre minimale.

(d) Conjecturer la réponse au problème.

5. **Algébriquement**

(a) Vérifier que $\mathscr{A}(x) = 2\left(x - \dfrac{13}{4}\right)^2 + \dfrac{151}{16}$

(b) Justifier l'affirmation suivante : pour tout $x \in [0; 5]$, $\mathscr{A}(x) \geq \dfrac{151}{16}$.
Pour quelle valeur de x obtient-on l'égalité ?

(c) En déduire la position de M qui rend l'aire de $MNPQ$ minimale. Quelle est cette aire ?

6. **Répondre au problème** et préciser l'aire de la nappe et des serviettes.

7. **Rédiger un compte-rendu du problème sur feuille pour le prochain cours**.

Les Annexes

Travail de l'élève : Comportant 13 chiffres depuis 1945, le numéro attribué par l'INSEE (Institut National de la Statistique et des données Économiques) à chaque Français à sa naissance nous permet de faire valoir nos droits aux prestations de la Sécurité Sociale. Depuis l'informatisation, dans les années 1970, ce numéro est suivi d'une clé de contrôle : le reste de la division euclidienne par 97 du nombre à 13 chiffres. Chacun d'entre nous est donc identifié par un numéro à $13+2$ chiffres définis comme suit :

- Le premier chiffre donne le sexe : 1 pour masculin, 2 pour féminin ;
- Les deux suivants l'année de naissance ;
- Les deux suivants le mois de naissance ;
- Les deux suivants le numéro du département de naissance ;
- Les trois suivants, le code INSEE de la ville dans ce département ;
- Les trois suivants l'ordre d'arrivée dans l'année du bébé dans la commune.
- Les deux derniers la clé de contrôle

Voici quelques codes INSEE de villes : Besanǫn : 056 ; Albi : 004 ; Dieppe : 217 ; Bordeaux : 063

1. Donner le numéro INSEE de Bernard, né le 22 janvier 1972, à Besançon. C'était la 25^{eme} naissance dans cette ville.
2. Donner les caractéristiques de la personne dont le numéro INSEE est 2 98 11 33 063 057. Trouver la clé de contrôle de ce numéro.
3. Si l'on associe à chacun d'entre vous son propre numéro INSEE, peut-on parler de fonction ?
4. Si oui, la définir comme fonction d'un ensemble de départ A vers un ensemble d'arrivée B à préciser.
5. Risque-t-on d'avoir deux personnes distinctes ayant un même numéro INSEE ? Y a-t-il un ordre sur les numéros INSEE ?

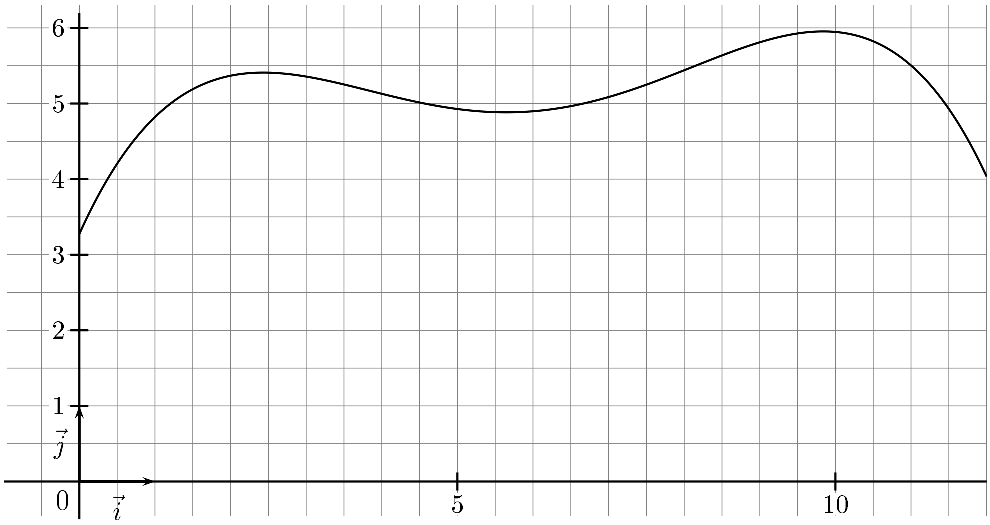
Application 1. On lance un caillou du haut d'un bâtiment avec une vitesse initiale et on mesure sa vitesse en fonction du temps t. À toute valeur de t on fait correspondre la vitesse $v(t)$ exprimées en m.s^{-1}. On note $\ldots : \ldots \mapsto \ldots\ldots$ et on donne le tableau de valeurs suivant :

T (en secondes)	0	1	2	3	4	5	6
$v(t)$ (en mètres par seconde)	2	11.81	21.62	31.43	41.24	0	0

1. Sachant que v est affine sur $[0;5[$, trouver la formule utilisée par les physiciens sur $[0;5[$.
2. Décrire alors l'expression de v sur $\mathbb{R}$ par un algorithme, comme un informaticien.
3. On peut également tracer un graphique représentant la vitesse en fonction du temps.
   Le faire avec comme unité graphique 1 cm = 1 s et 1 cm = 10 m.s^{-1} suivant les axes.
4. Grâce au tableau de valeur donner l'image de 2 et un antécédent de 11.81
5. Grâce au tableau de valeur donner l'image de 0 et un antécédent de 0. Que constate-on ?
6. Grâce au tableau de valeur pouvez-vous donner l'image de 2.5 et un antécédent de 5 ?
7. Cela signifie-t-il que 2.5 n'a pas d'image et 5 pas d'antécédent ?
8. Proposer deux autres méthodes pour répondre à la question 6 et les faire.
9. Tous les nombres ont-ils une image par v ? Pourquoi ? Comment cela se voit-il sur la courbe ? Sur le tableau ?
10. On donne deux instants $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$. Sans calculer les vitesses du caillou à ces moments, pouvez-vous les comparer ?

Sens de variation

Le graphique ci-dessous donne le niveau de la mer en mètres dans le port de Narbonne pendant 12h.



1. Cette courbe est-elle la courbe représentative d'une fonction ?

   On note f la fonction niveau de la mer en fonction du temps t.

2. (a) D'après le graphique, déterminer les intervalles de temps sur lesquels le niveau de la mer monte.

   (b) Pour tout t_1, t_2 appartenant à l'un de ces intervalles et tels que $t_1 < t_2$, que peut-on dire sur l'ordre de $f(t_1)$ et $f(t_2)$? Sur les intervalles .... et .... la fonction f .... l'ordre.

3. (a) D'après le graphique, déterminer l'intervalle de temps sur lequel le niveau de la mer descend.

   (b) Sur chacun de ces intervalles de temps, comment traduire ce phénomène à l'aide de la fonction f ?

   Sur .... et .... la fonction f .... l'ordre.

Attention ! !

4. (a) Soit g la fonction définie sur un intervalle I contenant les réels 4 et 7 telle que $g(4) > g(7)$. Peut-on conclure que la fonction g est inverse l'ordre sur l'intervalle $]4; 7[$?

   (b) Que faut-il préciser en plus pour conclure sur ce sujet pour la fonction g ?

A faire plus tard, dans la partie sur les extrema

5. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur maximale de la mer ?

   (b) Pour quelle valeur de t ce maximum est-il atteint ?

   (c) Est-ce un maximum absolu ?

6. (a) Sur les 12h représentées, quelle est la hauteur minimale de la mer ?

   (b) Pour quelle valeur de t ce minimum est-il atteint ?

   (c) Est-ce un minimum absolu ?

Tableau de variations

Etudier les variations d'une fonction consiste à dire sur quel(s) intervalle(s) elle est croissante, décroissante ou constante. On regroupe ces informations dans un tableau, appelé **tableau de variations**. Voici un exemple :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
Sens de variation de f		$\searrow$	6	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

1. (a) Deviner les variations de f à partir de ce tableau.
   (b) Ce tableau contient-il d'autres informations sur f ? Si oui, les donner.
   (c) A quel intervalle de la première ligne du tableau appartiennent les nombres -5 et -3 ?
   (d) Quel est le sens de variation de f sur cet intervalle ?
   (e) Dans quel ordre sont rangés les images de -5 et -3 ?
   (f) Dans quel ordre sont rangés les images de 5 et 100 ?
   (g) Dans quel ordre sont rangés les images de 0 et 5 ?
2. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction g, strictement croissante sur $[-4;0]$ de 0 à 3, strictement décroissante sur $[0;6]$ de 3 à -5 et constante sur $]6;+\infty[$ égale à -5.
   (b) Quelle est l'image de 0 ? Celle de 100 ?
   (c) Donner les éventuels antécédents de 0 ? de 3 ? de -5 ?
   (d) Dans quel ordre sont rangés les images de -3 et -0.5 ?
   A quel intervalle appartiennent-ils ?
   (e) Dans quel ordre sont rangés les images de 0.5 et 3 ?
   A quel intervalle appartiennent-ils ?
   (f) Dans quel ordre sont rangés les images de -0.5 et 3 ?
   A quel intervalle appartiennent-ils ?
   (g) On sait que les images de deux nombres a et b sont $f(a) = -1$ et $f(b) = -4$.
   Dans quel(s) intervalle(s) du tableau se situent a et b ? Donner leur ordre si c'est possible.
   (h) On sait que les images de deux nombres c et d sont $f(a) = 1$ et $f(b) = 2$.
   Dans quel(s) intervalle(s) du tableau se situent a et b ? Donner leur ordre si c'est possible.
   (i) Donner tous les nombres dont l'image est supérieure à -5.
   (j) On donne de plus comme informations : $f(-3) = f(1) = 2$.
   Donner tous les nombres dont l'image est inférieure à 2.
   (k) Dessiner une représentation graphique compatible avec ce tableau de variations.
3. **À faire plus tard**
   (a) Donner le maximimum et le minimum de la fonction g sur son ensemble de définition en précisant quand ils sont atteints.
   (b) Peut-on donner le maximimum et le minimum de la fonction f sur son ensemble de défintion ? Sur $]-\infty;4]$?

Exercices du Transmath

Exercice 1. 41 :
f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante et telle que $f(0) = 1$.
Pourquoi peut-on affirmer que, pour tout $x \leq 0$ on a $f(x) \leq 1$?

Exercice 2. 42 :
f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 6]$. Pourquoi peut-on affirmer que, pour tout $x \in [1; 6]$ on a $f(6) \leq f(x) \leq f(1)$?

Exercice 3. 43 : Une fonction affine par morceaux représentée, en déduire des encadrements de $f(x)$ à partir d'un encadrement de x.

Exercice 4. 44 : Compléter :

1. $0 \leq a \leq b$ implique $a^2 < b^2$ donc la fonction $x \longmapsto x^2$ est .... sur ....
2. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x+3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc si $x < 2$ alors $f(x)$ ....

Exercice 5. 45 : Compléter :

1. $0 \leq u \leq v$ implique $\dfrac{1}{u} < \dfrac{1}{v}$ donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est .... sur ....
2. La fonction $f : x \longmapsto -2x+3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc si $x < 2$ alors $f(x)$ ....

Exercice 6. 49 à 51 : Indiquer le sens de variation des fonctions affines adonnées :

- $f : x \longmapsto 2x - 3$
- $g : x \longmapsto 2 - 3x$
- $h : x \longmapsto -3 + \dfrac{x}{2}$
- $k : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}(3 - 5x)$

- $f : x \longmapsto -x + 3$
- $g : x \longmapsto x\sqrt{2} - 7$
- $h : x \longmapsto \dfrac{2 - x}{2}$

- $k : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}(\pi - 3)x$
- $f : x \longmapsto x(\sqrt{2} - 1) - 7$
- $g : x \longmapsto \dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{1}{2}x$

Exercice 7. 48 : Associer 3 courbes données à 3 tableaux de variations donnés

Exercice 8. 70-74 : Tracer un courbe compatible avec quelques informations et un tableau de variation

Exercice 9. 75 : On donne un tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

1. Déduire du tableau de variation le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x
2. L'inéquation $f(x) \geq 2$ a-t-elle des solutions ?

Exercice 10. 89 : On donne une représentation graphique d'une fonction sur $[-3;1]$ sur une calculatrice et un tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

1. À partir du tableau de variation, tracer une courbe susceptible de représenter f sur $\mathbb{R}$.
2. En vous aidant du graphique et du tableau, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique entre -3 et 1.
3. Prouver que si $x < -3$, alors $f(x) < -1.6$
4. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty; -3[$
5. Encadrer f lorsque $x \in [1;3]$
6. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[1;3]$
7. Utiliser la même méthode pour montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]3; +\infty[$
8. Conclure.

Exercice 11. 39 :
f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[2;5]$.
Pourquoi $f(2)$ est-il le minimum de f sur $[2;5]$?
Pourquoi $f(5)$ est-il le maximum de f sur $[2;5]$?

Exercice 12. 40 :
f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $[2;5]$.
Pourquoi $f(2)$ est-il le maximum de f sur $[2;5]$?
Pourquoi $f(5)$ est-il le minimum de f sur $[2;5]$?

Exercice 13. 46 - 47 : On donne la courbe représentative d'une fonction f.

1. Donner l'ensemble de défintion D_f de f
2. Dresser le tableau de variation de f
3. Indiquer le minimum et le maximum de f sur D_f lorsqu'ils existent.

Exercice 14. 54 :
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

1. Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = 9 - (x-2)^2$
   Pour démontrer une égalité, une méthode consiste à partir d'un membre de l'égalité et à le transformer jusqu'à ce que l'on obtienne l'autre membre.
2. En déduire que f a pour maximum 9 sur $\mathbb{R}$. Pour cela :
   Dire que 9 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ signifie que
   – *f prend la valeur 9*
   – *pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 9$*
   (a) En utilisant une des formes de $f(x)$, prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 9$
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = 9$
   (c) Conclure

Exercice 15. 69 :
ABC un triangle rectangle en A. On appelle O le milieu de l'hypoténuse $[BC]$. On donne $AB = 3$ et $AC = 4$.
Soit M un point mobile se déplaçant sur les côtés, partant de A, allant vers B, puis de B vers C, puis de C vers A et s'arrêtant en A.
On note x la distance qu'il a parcouru à partir de A et on pose $OM = f(x)$.

1. Faire une figure
2. Sans calculer OM, sauf pour des positions de M qui permettent un calcul facile, dresser le tableau de variations de f.

Exercice 16. 81 : Attention ! Il faut définition la valeur absolue avant ! !
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + |x - 1|$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 2$
2. Prouver que $f(x)$ prend effectivement la valeur 2
3. Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 17. 83 :
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 + |2x + 1|$ a un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. 84 :
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - (2x + 1)^2$ a un maximum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. 88 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{3} + |2x - 6|$

1. Écrire $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue
2. En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$ et strictement croissante sur $[3; +\infty[$
3. En déduire que si $x \leq 3$ alors $f(x) \geq 1$
4. Démontrer de même que si $x \geq 3$ alors $f(x) \geq 1$
5. Pour quelle valeur de x la valeur 1 est-elle atteinte ?
6. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Quel est-il ?
7. Pourquoi l'équation $f(x) = 0$ n'a-t-elle pas de solution ?

TICE avec Simone

Simone veut se construire un parasol pour chez lui. Elle décide de prendre le tissu de sa planche à voile pour éviter toute couture. Elle accroche un sommet à dans l'angle de sa terrasse, un autre sur une barre de 5 m le long d'un mur et accroche le dernier sommet de sa voile sur un arceau métallique en forme de quart de cercle, installé par ses soins. Ceci lui permet de faire coulisser sa voile pour avoir le plus d'ombre possible, à tout moment de la journée.

***Le but du problème** est de trouver la surface maximale d'ombre que Simone peut avoir à midi.*

Modélisation de la situation : On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $OI = 5$. M est un point quelconque de ce quart de cercle, H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO. On cherche où placer M pour que l'aire du triangle OHM soit maximale.

1. **Réaliser la figure et rédiger une conjecture :**
   (a) Faire un schéma de la situation à la main.
   (b) Préciser dans l'ordre les constructions que vous venez de réaliser pour faire la figure.
   (c) Rédiger le programme de construction de la figure sous Géogébra (décrire les étapes).
   (d) Réaliser ce programme et **appeler le professeur** pour qu'il valide la figure.
   (e) Réaliser les mesures nécessaires pour répondre au problème.
   (f) Rédiger alors une conjecture graphique et **appeler le professeur**.
2. **Étude graphique fonctionnelle du problème :**
   L'aire du triangle OMH dépend de la distance OH. On souhaite tracer la courbe représentative de l'aire de OMH en fonction de la distance OH.
   (a) Créer un tableau de valeurs donnant l'aire de OMH en fonction de OH.
   (b) Sur le même graphique, construire le point N qui a la même abscisse que H et dont l'ordonnée est l'aire de OHM.
   (c) Tracer la courbe en utilisant la commande "courbe : = lieu (point sur la courbe, point mobile dont il dépend)".
   Êtes vous certains d'avoir tracé la bonne courbe ? Justifier. **Appeler le professeur**.
   (d) Par lecture graphique, déterminer les valeurs de OH pour lesquelles le triangle OMH mesure 4 unités d'aire.
   (e) Décrire les variations de la courbe par lecture graphique.
   (f) Déterminer alors la position du point H qui donne la plus grande aire du triangle OMH
   (g) Déterminer l'aire maximale du triangle OMH
   (h) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux trouvés précédemment ?
   (i) A-t-on trouvé la valeur exacte de la solution du problème ? **Appeler le professeur**.
3. **Réponse au problème de Simone**
   (a) Où Simone doit-elle mettre ses sommets mobiles de voile pour avoir $4m^2$ d'ombre ?
   (b) Où Simone doit-elle mettre ses sommets mobiles de voile pour avoir le maximum d'ombre ? Quelle surface d'ombre a-t-elle alors à disposition ?
4. **Rédiger toutes les questions manuscrites sur feuille pour vendredi prochain.**

TICE avec Norbert

Norbert veut se faire une nappe orgininale en forme de parallélogramme pour l'anniversaire Simone. Il a donc acheté un morceau rectangulaire de tissu. La taille suffisante pour que tout parallélogramme inscrit dedans recouvre sa table (4×2.5 m). Norbert compte utiliser les pans restant pour faire des serviettes triangulaires pour sa femme et leurs deux enfants. Il souhaite alors découper une nappe avec la plus petite surface possible, afin d'avoir des serviettes les plus grandes possibles.

***Le but du problème** est de trouver où Norbert doit découper sa nappe.*

Modélisation de la situation : On considère un rectanle $ABCD$ de longueur $AB = 8$ cm et de largeur $AD = 5$ cm. Soit un point M quelconque sur $[AB]$. On définit alors N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que $AM = BN = CP = DQ$.
On cherche où placer M pour que l'aire de $MNPQ$ soit minimale.

1. **Découverte de la situation**
   (a) Faire la figure. $MNQP$ est-il bien un parallélogramme ? Justifier
   (b) Avons-nous tous la même aire pour $MNPQ$?
2. **Calcul de l'aire**
   (a) Calculer l'aire de $MNPQ$ pour $AM = 2$, $AM = 3$ et celle de votre parallélogramme.
   (b) En fonction de quelle grandeur l'aire de $MNPQ$ varie-t-elle ?
   (c) Quelle est l'aire de $MNPQ$ la plus grande possible ?
   (d) Est-il possible que l'aire de $MNPQ$ soit égale à $23.08\,cm^2$? Si oui, pour quelles valeurs de AM ? Que vaudrait alors l'aire de la nappe ? *(Rédiger l'algorithme utilisé pour répondre)*
3. **Approche fonctionnelle**
   (a) On pose $AM = x$. Trouver l'expression de $\mathscr{A}(x)$ de l'aire de $MNPQ$ en fonction de x.
   (b) Donner l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$
   (c) Tracer la courbe représentative de $\mathscr{A}$
   (d) Dresser alors le tableau de variation de $\mathscr{A}$
   (e) Conjecturer la réponse au problème (attention à l'échelle !).
4. **Avec un logiciel**
   (a) Réaliser la figure avec Géogébra
   (b) Faire afficher la longueur x et l'aire $\mathscr{A}(x)$
   (c) Déplacer le point M sur $[AB]$: observer les variations de l'aire et tenter de la rendre minimale.
   (d) Conjecturer la réponse au problème.
5. **Algébriquement**
   (a) Vérifier que $\mathscr{A}(x) = 2\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{151}{16}$
   (b) Justifier l'affirmation suivante : pour tout $x \in [0;5]$, $\mathscr{A}(x) \geq \frac{151}{16}$.
   Pour quelle valeur de x obtient-on l'égalité ?
   (c) En déduire la position de M qui rend l'aire de $MNPQ$ minimale. Quelle est cette aire ?
6. **Répondre au problème** et préciser l'aire de la nappe et des serviettes.
7. **Rédiger un compte-rendu du problème sur feuille pour le prochain cours**.