Chapitre 2 : Géométrie dans l'espace

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" THURSTON MOORE

Dernière modification : 19 octobre 2009

Table des matières

Cours : La géométrie dans l'espace

1 Les bases

1.1 Les axiomes

Axiome 1 : Il existe une et une seule droite de l'espace passant par deux points distincts.

Remarque : On dit qu'une droite est entièrement déterminée par la donnée de deux points. On nommera donc les droites avec deux points entre parenthèses.

Axiome 2 : Il existe un et un seul plan de l'espace passant par trois points non alignés.

Remarque : On nommera donc les plans avec trois points entre parenthèses.
Lorsqu'un plan contient les points A et B, alors il contient tous les points de la droite (AB).

Propriété 1. Un plan est entièrement déterminé par
– Trois points non alignés
– Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite

Définition 1. Quand des éléments de l'espace appartiennent à un même plan, on dit que ces éléments sont **coplanaires**.

Remarque : Deux ou trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

THÉORÈME 1. Lorsque tous les éléments d'un problème sont coplanaires, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent (Thalès, Pythagore ...)

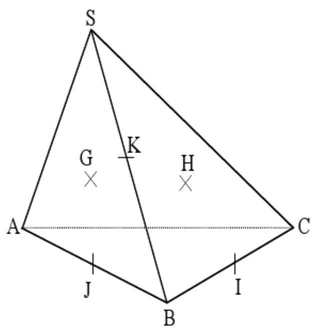
Remarque : Dans un problème de géométrie dans l'espace, on essaiera donc toujours de se placer dans un plan (que l'on prendra la peine de préciser) pour raisonner.

1.2 Représentation en perspective cavalière

Dans un représentation en perspective cavalière :

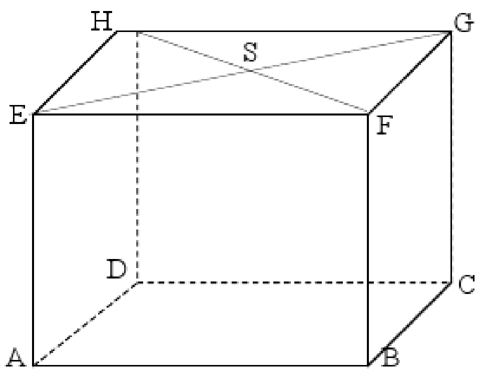
1. Les segments visibles sont dessinés en traits pleins ; les autres sont dessinés en pointillés.
2. Des points alignés sont représentés par des points alignés.
3. Deux droites de l'espaces parallèles (dans un plan) sont représentées par deux droites parallèles.
4. Des droites concourantes (dans un plan) sont représentées par des droites concourantes.
5. **Attention !** Des droites qui ne sont pas concourantes peuvent aussi être représentées par des droites concourantes.
6. Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
7. Dans un plan de face, une figure est représentée à l'échelle, dans les autres plans, les tailles sont réduites proportionnellement.

Exemples :



L'arête $[AC]$ du tétraèdre $SABC$ n'est pas visible : elle est cachée par les faces (SAB) et (SBC).

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$, $[AB]$ et $[SB]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle SAB. Il est donc sur la médiane (SJ). Les points S, J et G sont alignés.
De même H est le centre de gravité du triangle SBC. Il est sur la droite (SI).
Les droites (AC) et (SB) ne sont pas concourantes dans l'espace, mais elles se coupent sur le dessin.



Les arêtes $[AD]$, $[DC]$ et $[HD]$ du pavé droit $ABCDEFGH$ ne sont pas visibles.

Les droites (AB) et (EF) sont parallèles dans le plan (ABE).
Les droites (HD) et (BF) sont parallèles dans le plan (BDH).
Les droites (HF) et (GE) sont concourantes en leur milieu S.
Sur la face $ABEF$, les segments $[AB]$ et $[AE]$ sont à l'échelle donnée, tandis que sur la face $ADHE$, les segments $[EH]$ et $[AD]$ sont de taille réduite.
Les droites (HD) et (EF) ne sont pas concourantes dans l'espace, mais elles se coupent sur le dessin.

<u>**Exercices du livre :**</u> 1 + 2 p 267 (pk un dessin est faux, compléter des figures en traits pleins ou pointillés)

Exercices du livre : n°3 p 267

1. Représenter en perspective cavalière un tétraèdre $ABCD$, puis placez le milieu de chaque arête.
2. Placez le centre de gravité G du triangle ABC, puis le centre de gravité G' du triangle ABD
3. On note I le milieu de $[AB]$. Pourquoi sur la figure doit-on placer le point G de sorte que $CG = \frac{2}{3}CI$?

2 Rappels du plan

2.1 Les classiques

2.2 Droites remarquables du triangle

2.3 Les symétries

2.4 Les angles

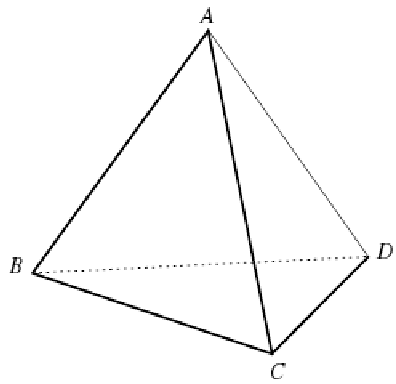
2.5 Les solides vus au collège

Voir la dernière page du livre pour le formulaire.

Exercice 2.1.

On considère $ABCD$ un tétraèdre régulier (les faces sont des triangles équilatéraux) dont les arêtes ont pour longueur a. Soient I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Montrer que $IJKL$ est un losange.
3. (a) Calculer AK en fonction de a.
   (b) Déterminer la nature du triangle AKB.
   (c) En déduire KI en fonction de a.
4. Montrer que $IJKL$ et un carré.



Exercices du livre : Transmath : TD 2 p 266 +22 p 269 (patrons) + TD 3 p 266 questions 1 à 3 incluses + 21 p 269 (calculs)

Exercices du livre : 47 - 48 - 50 p 273 (patrons, volumes ...)

Exercices du livre : 53 à 55 + 57 - 58 p 274 (volumes) + 59 - 60 p 274 (calculs)

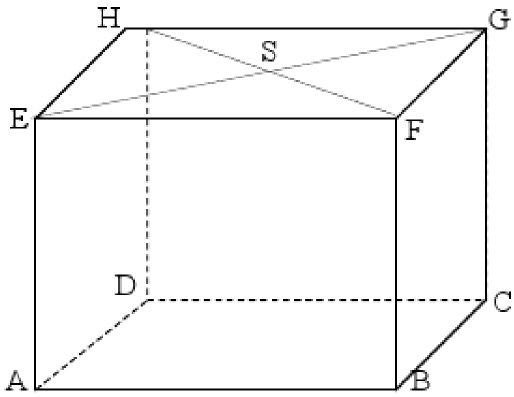
3 Positions relatives

3.1 De deux plans

<u>*Travail de l'élève*</u> :

Soit $ABCDEFGH$ un cube et S le centre de la face $EFGH$. On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou sans point commun.

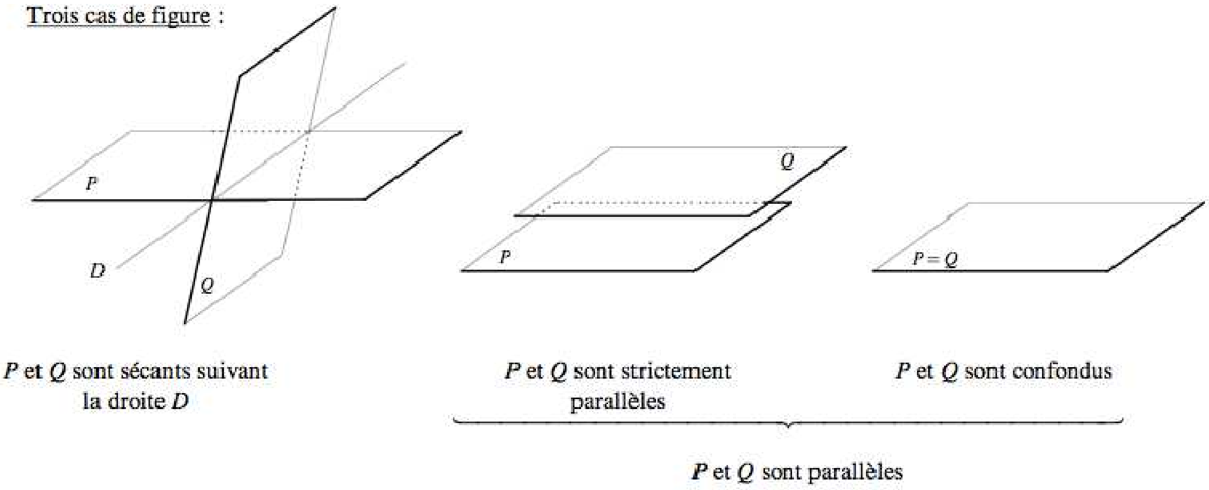
1. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui sont parallèles strictement et parallèles confondus.
2. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui ne sont pas parallèles.
3. Montrer que les plans (ABC) et (SCD) ne sont pas parallèles. Trouver l'intersection de ces plans.



<u>Définition</u> 2. On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou sans point commun.

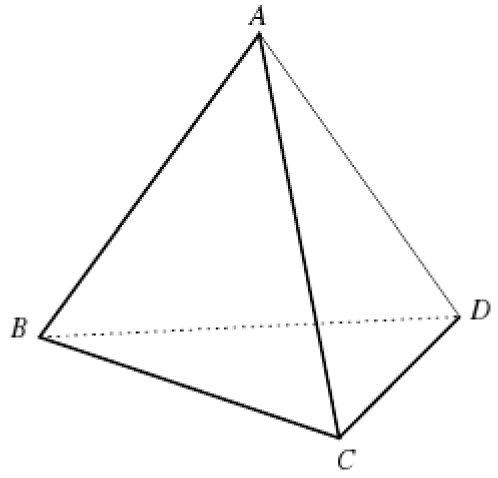
THÉORÈME 2. Il existe un plan et un seul passant par un point donné et parallèle à un autre plan.

Propriété 2. Deux plans de l'espace sont parallèles ou sécants. Dans ce dernier cas, leur intersection est une droite.



Problème : (servant d'exemple tout au long de la leçon)
On considère $ABCD$ un tétraèdre. Soient I, J, K, M et N les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
2. Déterminer les droites D_1 et D_2 d'intersection des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM) et (IJK).
3. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
4. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont parallèles.
5. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
6. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Réponse aux questions 1 et 2 :

Exercices du livre : 4 à 9 p 267

Propriété 3. Dans l'espace, si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles entre eux.

<u>Exercice</u> 3.1. $ABCDEFGH$ un parallélépipéde rectangle. Soient I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[BF]$.

1. Faire un schéma
2. Démontrer que les plans (DEG) et (AFC) sont parallèles.
3. Démontrer que les plans (IJK) et (AFC) sont parallèles.
4. Déduire des questions 2 et 3 que (IJK) et (DEG) sont parallèles.

4 De deux droites

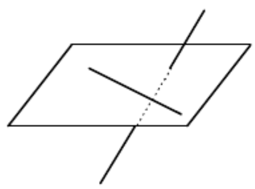
<u>Travail de l'élève</u> : Soit $SABC$ un tétraèdre.

1. Les points S, A, B et C sont-ils coplanaires ?
2. Les droites (SA) et (BC) sont-elles coplanaires ? *(on raisonnera par l'absurde)*

Propriété 4.
– S'il existe un plan contenant deux droites d et d', alors d et d' sont soit sécantes, soit parallèles (strictement ou confondues) dans le plan qui les contient.
– Sinon on dit qu'elles sont non coplanaires et elles n'ont pas de points d'intersection.

Si les droites sont coplanaires :

Si les droites ne sont pas coplanaires :

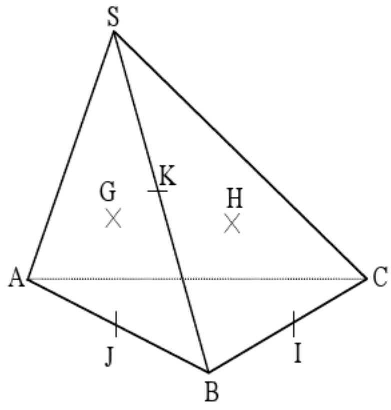


Remarques :
– Dans l'espace, deux droites sans points commun ne sont pas forcément parallèles ! Elles peuvent être non coplanaires.
– Dans l'espace, deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont pas forcément de point commun ! Elles peuvent être non coplanaires.
– Dans l'espace, un plan est entièrement déterminer par deux droites sécantes.
– Dans l'espace, un plan est entièrement déterminer par deux droites strictement parallèles.

<u>Travail de l'élève</u> :

Soit $SABC$ un tétraèdre et I le mileu de $[BC]$, J celui de $[AB]$, K celui de $[SB]$, G le centre de gravité du triangle SAB et H le centre de gravité du triangle SBC.

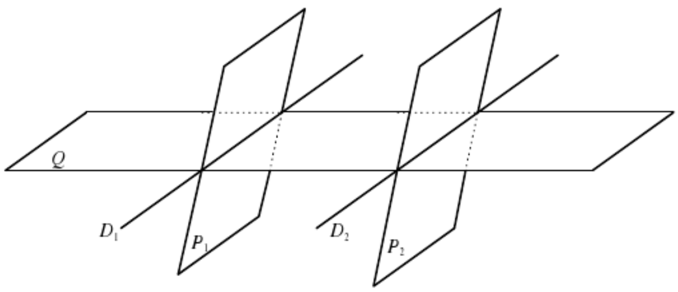
1. (a) Montrer que $(AC)//(IJ)$.
   (b) Montrer que $(IJ)//(GH)$ (triangle SIJ).
   (c) Montrer aussi que $(AC)//(GH)$ (triangle KAC).
2. On considère le plan parallèle à (ABC) passant par K. Comment le dessiner ?



Propriété 5. Dans l'espace, si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Réponse à la question 3 :

Propriété 6. Dans l'espace, si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et leur droites d'intersection sont parallèles.



Preuve : Soient D_1 et D_2 les droites d'intersection. Elles sont coplanaires, donc soit parallèles, soit sécantes. Or si elles sont sécantes en un point M alors M appartient à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, ce qui est absurbde. Donc elles sont strictement parallèles.

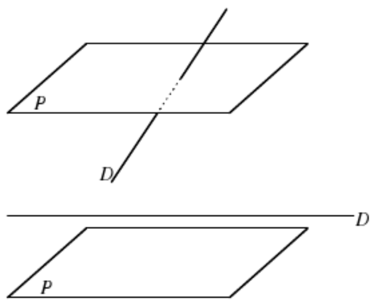
Réponse à la question 4 :

4.1 D'une droite et d'un plan

Définition 3. Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Dans le cas contraire, elle est sécante au plan et leur intersection est un point.

Remarque : Une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan.

Propriété 7. Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est incluse dans ce plan ou elle n'a pas de point commun avec ce plan.



Preuve :

– Si d est une droite parallèle à un plan $\mathcal{P}$ telle qu'elle n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$ et qu'elle possède un point comme A avec $\mathcal{P}$. Comme $d//\mathcal{P}$ il existe une droite d' de $\mathcal{P}$ telle que $d//d'$ (strictement car $d \not\subseteq \mathcal{P}$).
  On considère alors la droite Δ de $\mathcal{P}$, parallèle à d' passant par A.
  On a $\Delta//d'//d$ donc $\Delta//d$. Or A appartient à D et à Δ, donc d et Δ sont confondues. Mais $d \not\subseteq \mathcal{P}$, donc ceci est absurde, notre hypothèse est fausse.
– Réciproquement :
  – Si $d \subset \mathcal{P}$, alors d parallèle à elle-même donc d parallèle à $\mathcal{P}$.
  – Supposons que d et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection. Alors il existe $A \in \mathcal{P}$ et on a $A \notin d$.
    On considère alors le plan $\mathcal{P}'$ contenant A et d. Comme $d \not\subseteq \mathcal{P}$, on a $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ distincts, avec A pour point commun. Ils sont sécants en une droite d'.
    Comme d et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection, d et d' ne sont pas sécantes. Mais elles sont coplanaires (dans $\mathcal{P}'$), donc elles sont strictement parallèles.
    On a donc trouver une droite d' de $\mathcal{P}$ parallèle à d. On conclut que d est parallèle à $\mathcal{P}$.

Réponse à la question 5 :

Propriété 8. Une droite et un plan de l'espace sont soit parallèles, soit sécants (et dans ce cas leur intersection est un unique point).

THÉORÈME 3. Dans l'espace, si deux droites sécantes (d'un plan) sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Réponse à la question 6 :

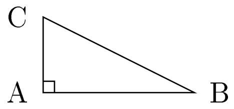
Exercices du livre : 11 - 14 - 15 p 267 + 23 - 26 - 29 à 31 - 33 - 35 p 270

Les Annexes

Le théorème de Pythagore

THÉORÈME 1. Dans un triangle rectangle, le carré de .... est égal à ....

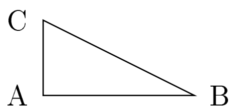
Conséquence : Si dans un triangle, cette égalité n'est vérifiée pour aucun des côtés, alors ....



Si ....
Alors ....

Utilisations :
– ....
– ....

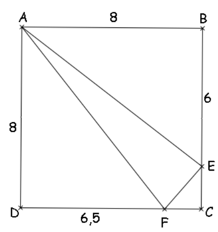
THÉORÈME 2. (Réciproque)
Si le carré du .... est égal à la somme des carrés des deux autres alors le triangle est ....



Si ....
Alors ....

Utilisation : ....

<u>Exercice</u> 1.1. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 8. De plus, on donne $BE = 6$ et $DF = 6.5$.
Le triangle AEF est-il rectangle ?



Le théorème de Thalès

THÉORÈME 3. Si deux triangles ont .... et des côtés appartenant à la même droite ou parallèles, alors les mesures des côtés des deux triangles sont ....

Si SAB et $SA'B'$ sont deux triangles tels que :

- S est un sommet commun
- $A' \in [SA]$ et $B' \in [SB]$
- $(A'B')//(AB)$

Alors on a $\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

Faire la figure ci-dessus

Utilisation : ....

THÉORÈME 4. Réciproque :
Si deux triangles ont .... et deux côtés deux à deux appartenant à la même droite et de longueurs proportionnelles, alors les deux autres côtés sont ....

Si SAB et $SA'B'$ sont deux triangles tels que :

- S est un sommet commun
- $A' \in [SA]$ et $B' \in [SB]$
- $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB}$

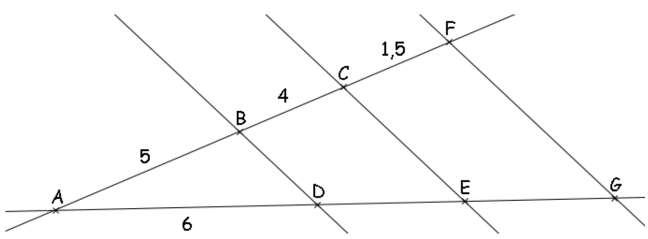
Alors on a ....

Faire la figure ci-dessus

Utilisation : ....

Exercice 1.2. Sur la figure ci-contre, les droites (BD) et (CE) sont parallèles. De plus, on donne $AB = 5$, $BC = 4$, $CF = 1.5$, $AD = 6$ et $AG = 12.6$.

1. Calculer DE
2. Les droites (BD) et (FG) sont-elles parallèles ?



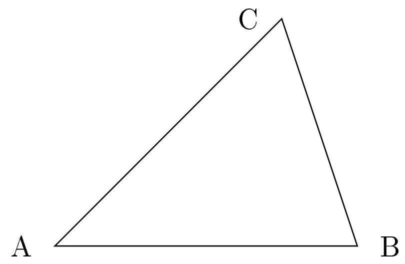
Les médiatrices

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite qui ....
....

Propriétés dans le triangle :

– Les trois médiatrices d'un triangle sont ....
– L'intersection des médiatrices est ....
....

Sur la figure ci-contre, tracer les médiatrices du triangle et son cercle circonscrit (coder)

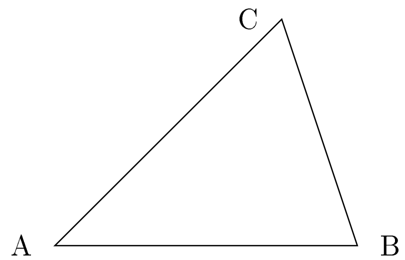


Les médianes

Définition : Dans un triangle, une médiane est une droite qui ....
....

Propriétés dans le triangle :

– Les trois médianes d'un triangle sont ....
– L'intersection des médianes est ....
....
– Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ de la médiane en partant du sommet.



Tracer les médianes du triangle ci-dessus (coder)

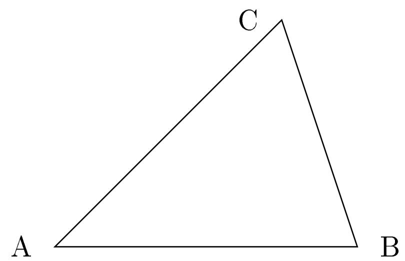
Les hauteurs

Définition : Dans un triangle, une hauteur est une droite qui ....
....

Propriétés dans le triangle :

– Les trois hauteurs d'un triangle sont ....
– L'intersection des hauteurs est ....
....

Sur la figure ci-contre, tracer les hauteurs du triangle (coder)

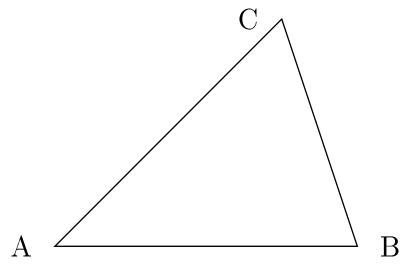


Les bissectrices

Définition : La bissectrice d'un angle est la droite qui ....

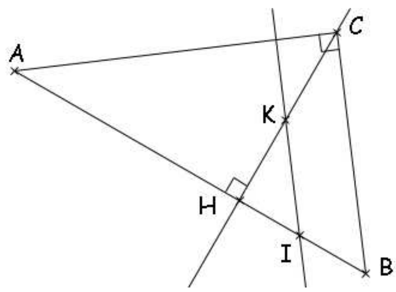
Propriétés dans le triangle :

- Les trois bissectrices d'un triangle sont ....
- L'intersection des bissectrices est ....

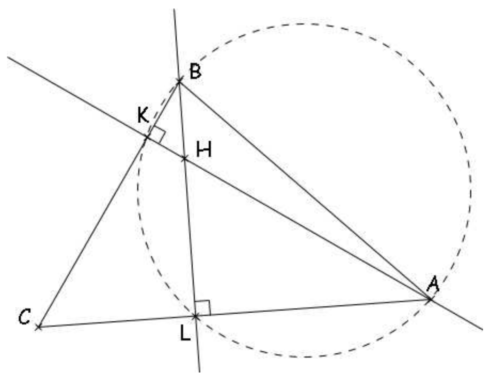


Sur la figure ci-contre, tracer les bissectrices du triangle et son cercle inscrit (coder)

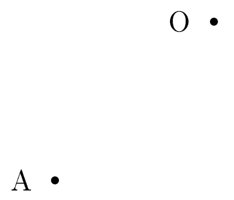
Exercice 1.3. ABC est un triangle rectangle en C. On appelle H le pied de la hauteur issue de C. Soit I un point de $[AB]$. La parallèle à la droite (BC) passant par I coupe (CH) en K.
Montrer que (AK) est perpendiculaire à (CI).



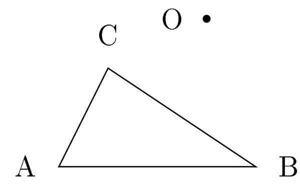
Exercice 1.4. ABC est un triangle d'orthocentre H. La hauteur (AH) coupe (BC) en K et la hauteur (BH) cooupe (AC) en L.
Montrer que les points A, L, K et B sont cocycliques, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même cercle, dont on préciser le diamètre.



La symétrie centrale



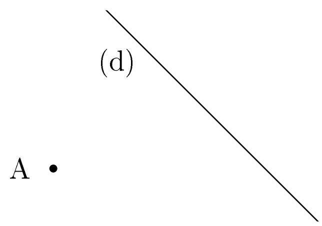
Tracer le symétrique A' de A par rapport à O



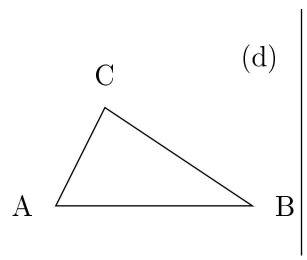
Tracer le symétrique $A'B'C'$ de ABC par rapport à O

- La symétrie centrale conserve les ...., les .... et les ....
- A' est le symétrique de A par rapport à $O \Longleftrightarrow O$ est le .... de $[AA']$
- Le seul point invariant par une symétrie centrale est ....

La symétrie axiale



Tracer le symétrique A' de A par rapport à (d)

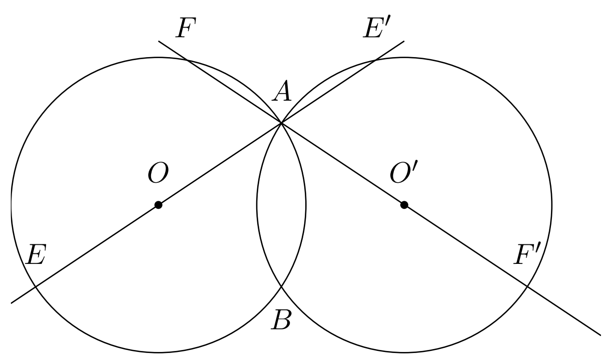


Tracer le symétrique $A'B'C'$ de ABC par rapport à (d)

- La symétrie axiale conserve les ...., les .... et les ....
- A' est le symétrique de A par rapport à $(d) \Longleftrightarrow (d)$ est la .... de $[AA']$
- L'ensemble des points invariants par une symétrie axiale est ....

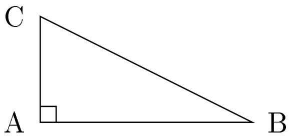
<u>Exercice</u> 1.5. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de même rayon, de centres respectifs O et O' et sécants en A et B. La droite (OA) recoupe $\mathcal{C}'$ en E' et $\mathcal{C}$ en E. La droite $(O'A)$ recoupe $\mathcal{C}$ en F et $\mathcal{C}'$ en F'.

1. Démontrer que les points A, B et F' sont alignés.
2. Soit s la réflexion (symétrie orthogonale) d'axe (AB). Quelles est l'image de E par s ?
3. Démontrer que les droites $(E'F')$, (EF) et (AB) sont concourantes.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $E'F'EF$?



Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, on a les relations trigonométriques suivantes :

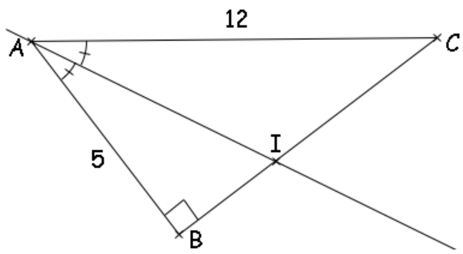


- $\sin(\alpha) = \dfrac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots}$

Exemples : $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Utilisations :
- . . . .
- . . . .

<u>Exercice</u> 1.6. Soit un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 5$ et $AC = 12$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en I.
Calculer l'angle $\widehat{ACB}$ et la longueur BI à 10^{-1} près.

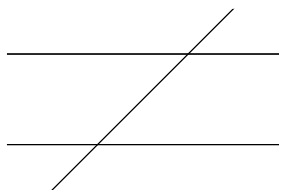


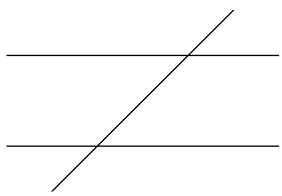
Angles et parallèles

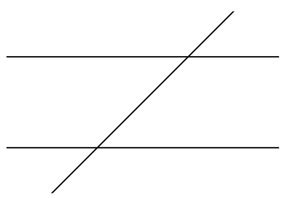
Théorèmes : Soit une droite Δ coupant deux autres droites d_1 et d_2, on a
- $d_1 // d_2$ si et seulement si les angles correspondants sont égaux,
- $d_1 // d_2$ si et seulement si les angles alternes-internes sont égaux,
- $d_1 // d_2$ si et seulement si les angles alternes-externes sont égaux.

<u>*Utilisations*</u> :
- Montrer que deux angles sont égaux,
- Montrer que deux droites sont parallèles.

Sur les figures, coder les angles dans l'ordre où l'on en parle



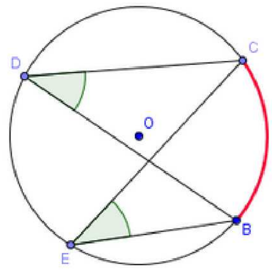




Angles inscrits dans un cercles

Théorème :
Si deux angles inscrits sur un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

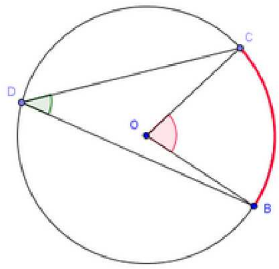
Utilisation : Montrer que deux angles sont égaux.



$\widehat{CDB} = \widehat{CEB}$

Théorème :
Si un angle inscrit intercepte le même arc qu'un angle au centre, alors sa mesure est la moitié de celle de celui-ci.

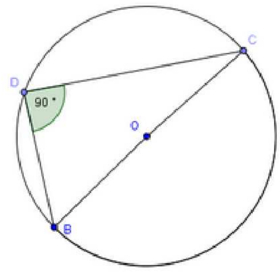
Utilisation : Montrer qu'un angle est le double de l'autre.



$\widehat{CDB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$

Théorème :
Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors il est rectangle et réciproquement.

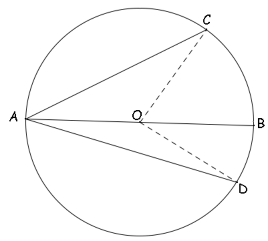
Utilisation : Montrer qu'un angle est droit.



DBC est rectangle en D.

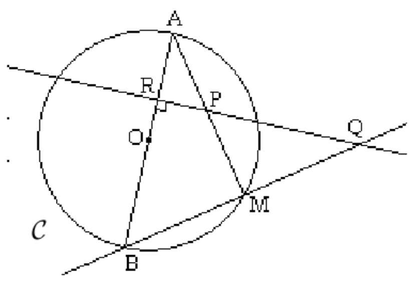
Exercice 1.7. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. On place un point M sur $\mathcal{C}$, distincts de A et B. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAM}$ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en N.
Faire une figure puis montrer que la droite (ON) est parallèle à la droite (AM).

Exercice 1.8. $\mathcal{C}$ est un cercle de dimaètre $[AB]$ et de centre O. Les points C et D sont deux points du cercle $\mathcal{C}$, de part et d'autre de la droite (AB) et tel que $\widehat{BOC} = 56°$ et $\widehat{BOD} = 30°$.
Calculer les angles du triangle ACD



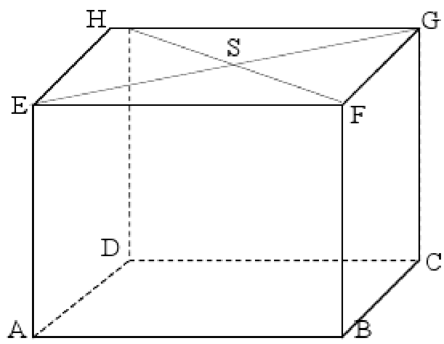
Exercice 1.9. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ et R un point de $[OA]$.
La perpendiculaire à (AB) menée par R coupe (AM) en P et (BM) en Q.
On note I l'intersection de (BP) et (AQ).

1. Quelle est la nature du triangle ABM.
2. Démontrer que (BP) et (AQ) sont perpendiculaires.
3. En déduire que I est un point du cercle $\mathcal{C}$.



Position relative de deux plans

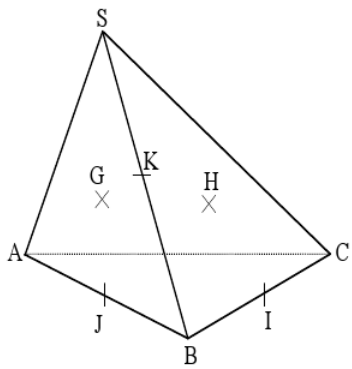
Soit $ABCDEFGH$ un cube et S le centre de la face $EFGH$. On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou sans point commun.



1. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui sont parallèles strictement et parallèles confondus.
2. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui ne sont pas parallèles.
3. Montrer que les plans (ABC) et (SCD) ne sont pas parallèles. Trouver l'intersection de ces plans.

Transitivité du parallélisme

Soit $SABC$ un tétraèdre et I le mileu de $[BC]$, J celui de $[AB]$, K celui de $[SB]$, G le centre de gravité du triangle SAB et H le centre de gravité du triangle SBC.



1. (a) Montrer que $(AC)//(IJ)$.

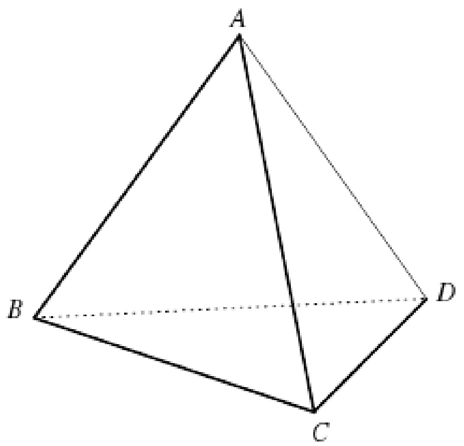
   (b) Montrer que $(IJ)//(GH)$ (triangle SIJ).

   (c) Montrer aussi que $(AC)//(GH)$ (triangle KAC).
2. On considère le plan parallèle à (ABC) passant par K. Comment le dessiner ?

Problème

On considère $ABCD$ un tétraèdre. Soient I, J, K, M et N les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

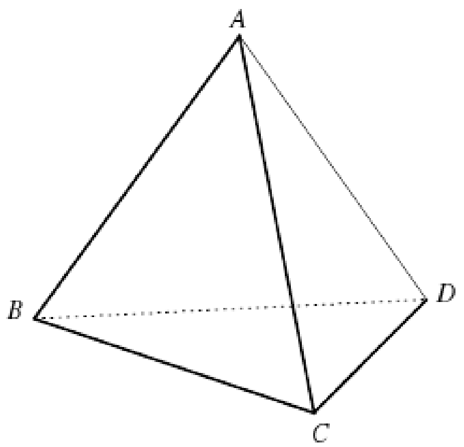
1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
2. Déterminer les droites D_1 et D_2 d'intersection des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM) et (IJK).
3. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
4. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont parallèles.
5. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
6. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Problème

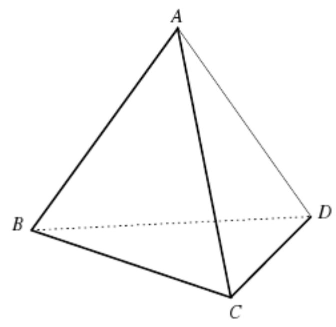
On considère $ABCD$ un tétraèdre. Soient I, J, K, M et N les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
2. Déterminer les droites D_1 et D_2 d'intersection des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM) et (IJK).
3. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
4. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont parallèles.
5. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
6. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Exercices dans l'espace

Exercice 2.1. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (les faces sont des triangles équilatéraux) dont les arêtes ont pour longueur a. Soient I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.



1. Faire un schéma de la situation.
2. Montrer que $IJKL$ est un losange.
3. (a) Calculer AK en fonction de a.
   (b) Déterminer la nature du triangle AKB.
   (c) En déduire KI en fonction de a.
4. Montrer que $IJKL$ et un carré.

Exercice 2.2. $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle. Soient I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[BF]$.

1. Faire un schéma
2. Démontrer que les plans (DEG) et (AFC) sont parallèles.
3. Démontrer que les plans (IJK) et (AFC) sont parallèles.
4. Déduire des questions 2 et 3 que (IJK) et (DEG) sont parallèles.

Exercice 2.3. $ABCDE$ un pyramide telle que $BCDE$ soit un parallèlogramme de centre O.
I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$

1. Faire un schéma
2. Préciser en justifiant les intersections :
   (a) Des plans (ABC) et (ACD)
   (b) Des plans (ABD) et (AEC)
   (c) De la droite (AO) et du plan (AEC)
   (d) De la droite (ID) et de la droite (AO)
3. Démontrer que la droite (IJ) et la droite (ED) sont parallèles.
4. En déduire l'intersection des plans (ABC) et (EID)
5. Montrer que la droite (IJ) et le plan (BCD) sont parallèles.

Exercice 2.4. $ABCDEFGH$ un cube. Soient I le milieu de $[AE]$, J le milieu de $[AB]$, K le milieu de $[BC]$ et L le milieu de $[CG]$.

1. Faire un schéma
2. Quelle est la nature du quadrilatère $AILC$?
3. Démontrer que les droites (JK) et (AC) sont parallèles.

4. En déduire que les droites (JK) et (LI) sont parallèles.
5. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont coplanaires.
6. En déduire qu'elles sont sécantes en un point S.
7. Déterminer l'intersection des plans (ABF) et (FBC).
8. Démontrer que le point S appartient à la droite (BF)

Exercice 2.5. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (les faces sont des triangles équilatéraux). Soient I, J, et K les milieux respectifs de $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (IJ) sont parallèles.
2. Exprimer IJ en fonction de AB
3. Exprimer le périmètre P' du triangle IJK en fonction du périmètre P du triangle ABC.
4. Exprimer l'aire A' du triangle IJK en fonction de l'aire A du triangle ABC.
5. Exprimer le volume V' du tétraèdre $IJKD$ en fonction du volume V du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 2.6. On considère un cube $ABCDEFGH$ et I un point de l'arête $[GC]$.

1. Préciser, en justifiant les réponses, si les éléments suivants sont coplanaires ou non :
   (a) Les droites (EH) et (BC)
   (b) Les droites (AG) et (BH)
   (c) Les droites (AG) et (EI)
   (d) Les droites (BH) et (EI)
2. Déterminer la position relative des plans (EGB) et (ACH).
3. Le point I appartient au plan (EGB), (DAG), (EAC) ou (HEF) ?

Exercice 2.7. On considère une pyramide régulière $SABCD$ de sommet S, de base carrée $ABCD$ dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On pose $AB = a$. On appelle I le milieu de $[SA]$, J le milieu de $[SB]$ et O le centre de $ABCD$.

1. Faire une figure en prenant $a = 5$ cm.
2. Montrer que $AC = a\sqrt{2}$.
3. Démontrer (SA) et (SC) sont perpendiculaires.
4. Déterminer, en jusitifant les intersections suivantes :
   (a) des plans (SAB) et (SBC)
   (b) des plans (SAC) et (SBD)
   (c) de la droite (SO) et du plan (ADC)
5. (a) Démontrer que les points A, C, S, O et I sont coplanaires.
   (b) En déduire que les droites (CI) et (SO) sont sécantes. Que représente leur intersection pour le triangle SAC ?
6. Déterminer la position relative des droites (SB) et (AC).
7. Démontrer que (IJ) est parallèle au plan (ABC).