Méthodes classiques pour trouver une limite

1. Les limites des fonctions de référence (carré, cube, racine et inverse) sont à connaître par coeur en $\pm\infty$ et en 0 pour la fonction inverse.
   Les courbes représentatives de chacune sont un bon moyen pour retenir les limites.
   Ces limites sont déjà rappelées sur une fiche précédente.

2. Les opérations sur les limites et les formes indéterminées sont à (re)connaître par coeur également.

3. $\lim_{x \to a} f(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   L'étude à droite ou à gauche de a se fait de la même manière.
   On constatera que dans tous les cas $a \in D_f$ ou a est une borne de D_f, sinon la limite n'existe pas, et par conséquent, la question non plus.

   – Si $a \in D_f$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
     Il faut donc toujours commencer par regarder si la fonction existe en a.

   – Si $a \notin D_f$ alors a est une borne de f. A notre niveau, il s'agira toujours du cas où f est une fonction rationnelle.
     On remplace x par a dans l'expression de f. Si l'on trouve que la limite vaut :

     (a) « $\dfrac{k}{0}$ »avec $k \in \mathbb{R}^*$, alors suivant si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^- et suivant le signe de k, on a :
     $$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

     (b) « $\dfrac{0}{0}$ », alors a est une racine du numérateur et du dénominateur de f et on peut les factoriser par $(x - a)$.
     Après cette factorisation, on simplifie le quotient le plus possible.
     On trouve alors $\lim_{x \to a} f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

4. $\lim_{x \to \infty} f(x)$

   Les cas $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$ se traitent de la même manière.
   A notre niveau, en considérant les points 1) et 2) acquis, il suffit de considérer les fonctions rationnelles (les fonctions polynômes sont des fonctions rationnelles de dénominateur 1).

   La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du rapport des termes de plus haut degré, en tenant compte de leurs coefficients.

   Une fois écrit cela, on simplifie la nouvelle expression rationnelle et on trouve la limite, qui peut être $\pm\infty$ comme un nombre réel.

Lorsque l'on a une forme indéterminée, l'idée est de changer l'écriture de l'expression de f en factorisant ou en développant, suivant l'écriture initiale.
Les cas plus compliqués (non décrits ici) seront toujours guidés cette année.