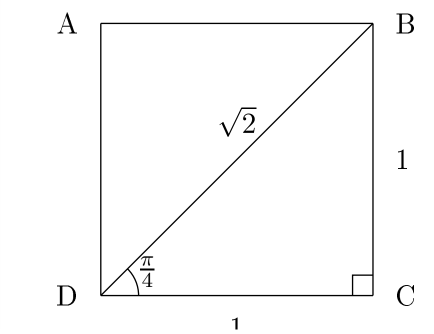
Exercice 1. **ROC** : Démontrer les valeurs remarquables suivantes (3 points)

> **Propriété 1.** $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

Démonstration :

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et de $\cos\frac{\pi}{4}$ on exploite la diagonale d'un carré de côté 1



Dans le triangle DCB rectangle en C, il vient :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De plus $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Exercice 2. *Les questions sont indépendantes.* (5 points)

Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O munie d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, avec $OI = \vec{i}$ et $OJ = \vec{j}$.

Les points A et B sont tels que : $\widehat{IOA} = 105°$ et $\widehat{IOB} = -60°$

1. Une mesure en radians des angles orientés :
   (a) $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ est $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ rad
   (b) $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$ est $-\frac{\pi}{3}$ rad
   (c) $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$ rad
2. Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\leq\cos x\leq 1$ et $-1\leq\sin x\leq 1$, on en déduit :
$$-11 \leq \sin 2\theta + 3\cos\theta - 7 \leq -3$$
3. $\cos\left(\frac{79\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{78\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right) = \cos\left(13\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

Exercice 3. Résoudre dans l'équation $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour (2 points)

1. $\theta\in]-\pi;\pi]$: $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \iff \theta = -\frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{2\pi}{3}$
2. $\theta\in\mathbb{R}$: $\theta = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$
3. $\theta\in[0;2\pi[$: $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{3}$

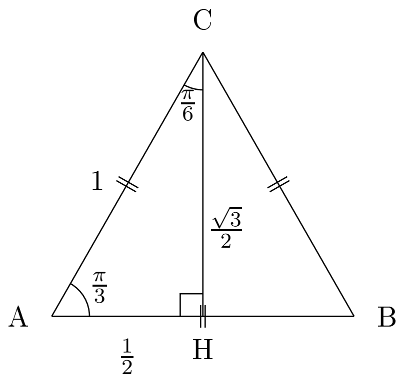
Exercice 1. ROC : Démontrer les valeurs remarquables suivantes (3 points)

Propriété 2. $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$; $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Démonstration :

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus de $\dfrac{\pi}{3}$ on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui, d'après le théorème de Pythagore mesure :

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Dans le triangle AHC rectangle en H on a :

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \sqrt{3}$$

Exercice 2. *Les questions sont indépendantes.* (5 points)

Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O munie d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $OI = \vec{i}$ et $OJ = \vec{j}$. Les points A et B sont tels que : $\widehat{IOA} = 60°$ et $\widehat{IOB} = -105°$

1. Une mesure en radians des angles orientés :
   (a) $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ est $\dfrac{\pi}{3}$ rad
   (b) $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$ est $-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{7\pi}{12}$ rad
   (c) $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}) = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{11\pi}{12}$ rad
2. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$, on en déduit :
$$-10 \leq \sin 3\theta + 2\cos\theta - 7 \leq -4$$
3. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{79\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{3} - 2\pi\right) + \sin\left(\dfrac{78\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(13\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$

Exercice 3. Résoudre dans l'équation $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour (2 points)

1. $\theta \in]-\pi;\pi]$: $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos\theta = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \iff \theta = \pm\dfrac{5\pi}{6}$
2. $\theta \in \mathbb{R}$: $\theta = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
3. $\theta \in [0;2\pi[$: $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$