Exercice 1. Canoniser le polynôme suivant : $P(x) = 7x^2 - 5x + 9$

$$\begin{aligned} P(x) &= 7x^2 - 5x + 9 = 7\left[x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{9}{7}\right] = 7\left[\left(x^2 - \frac{5}{7\times 2}\right)^2 - \left(\frac{5}{14}\right)^2 + \frac{9}{7}\right] \\ &= 7\left[\left(x^2 - \frac{5}{14}\right)^2 - \frac{25}{196} + \frac{9\times 28}{7\times 28}\right] = 7\left[\left(x^2 - \frac{5}{14}\right)^2 + \frac{227}{196}\right] \end{aligned}$$

Exercice 2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 - 4x - 8 = 0$: $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 32 = 48$

   Donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

   On obtient : $x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{48}}{2} = \dfrac{4 - 4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2(2 - 2\sqrt{3})}{2} = 2 - 2\sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{48}}{2} = 2 + 2\sqrt{3}$

   Attention à la simplification : on a une somme au numérateur !

2. $4x^2 + 7x - 1 \geq 0$: $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 49 + 16 = 65$

   Donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

   On obtient : $x_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{65}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{65}}{8}$

   On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-7-\sqrt{65}}{8}$		$\frac{-7+\sqrt{65}}{8}$		$+\infty$
signe de $3x^2 + 6x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   $S =]-\infty; \dfrac{-7 - \sqrt{65}}{8}] \cup [\dfrac{-7 + \sqrt{65}}{8}; +\infty[$

3. $-m^2 + m - 5 > 0$: $\quad \Delta = 1 - 20 = -19 < 0$

   Donc le trinôme n'a pas de racine. Attention : cela signifie que l'équation $-m^2 + m - 5 = 0$ n'a pas de solution, mais ne veut pas dire pour autant que l'**inéquation**$-m^2 + m - 5 > 0$ n'a pas de solution !

   On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $-m^2 + m - 5$		$-$	

   $S = \emptyset$

Exercice 3. f est le polynôme défini par $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

1. $(2x+1)(ax^2+bx+c) = 2ax^3+2bx^2+2cx+ax^2+bx+c = 2ax^3+(2b+a)x^2+(2c+b)x+c$. Ce polynôme de degré 3 est égal à $f(x) = 4x^3+2x^2-2x-1$ si et seulement si $\begin{cases} 2a = 4 \\ 2b + a = 2 \\ 2c + b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$

   Donc $f(x) = (2x + 1)(2x^2 - 1)$

2.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff (2x+1)(2x^2-1)=0 \\ &\iff 2x+1=0 \text{ ou } 2x^2-1=0 \\ &\iff x=-\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Interrogation n°5

Exercice 1. Canoniser le polynôme suivant : $P(x)=5x^2-7x+9$

$$\begin{aligned} P(x) &= 5x^2-7x+9=5\left[x^2-\frac{7}{5}x+\frac{9}{5}\right]=5\left[\left(x^2-\frac{7}{5\times 2}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{9}{5}\right] \\ &= 5\left[\left(x^2-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{49}{100}+\frac{9\times 20}{5\times 20}\right]=5\left[\left(x^2-\frac{7}{10}\right)^2+\frac{131}{100}\right] \end{aligned}$$

Exercice 2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $2x^2-5x-10=0$: $\Delta=b^2-4ac=25+80=105$
   Donc le trinôme a deux racines $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
   On obtient : $x_1=\dfrac{5-\sqrt{105}}{4}$ et $x_2=\dfrac{5+\sqrt{105}}{4}$
2. $3x^2+6x-2\geq 0$: $\Delta=b^2-4ac=36+24=60$
   Donc le trinôme a deux racines $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
   On obtient : $x_1=\dfrac{-6-\sqrt{60}}{6}=\dfrac{-6-2\sqrt{15}}{6}=\dfrac{2(-3-\sqrt{15})}{2\times 3}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$ et $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$
   Attention à la simplification : on a une somme au numérateur !
   On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{15}}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{15}}{3}$		$+\infty$
signe de $3x^2+6x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   $S=]-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}]\cup[\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3};+\infty[$
3. $-m^2+m-5<0$: $\Delta=1-20=-19<0$
   Donc le trinôme n'a pas de racine. Attention : cela signifie que l'équation $-m^2+m-5=0$ n'a pas de solution, mais ne veut pas dire pour autant que l'**inéquation**$-m^2+m-5<0$ n'a pas de solution !
   On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $-m^2+m-5$		$-$	

   $S=\mathbb{R}$

Exercice 3. Le même que ci-dessus