Interrogation n°12

Exercice 1. ROC

Théorème 1 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

***Preuve* :**
D'après le théorème précédent on a pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_p = u_0 + pr \qquad \text{et} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Par conséquent

$$u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr = (n-p)r \iff u_n = u_p + (n-p)r$$

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases} \qquad \text{et } v_n = \frac{4n + (-1)^n}{n}$$

1. Calculer u_1 et v_1
   $u_1 = u_0 + 2 \times 0 = 2$ et $v_1 = \dfrac{4 \times 1 + (-1)^1}{1} = 3$.

2. Montrer que (u_n) est une suite croissante à partir de $n = 1$.
   $u_{n+1} = u_n + 2n \iff u_{n+1} - u_n = 2n > 0$ pour tout $n \geq 1$ donc (u_n) est croissante à partir de $n = 1$.

3. Montrer que la suite (v_n) est convergente i.e qu'elle admet une limite que l'on déterminera.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\dfrac{4n-1}{n} \leq v_n \leq \dfrac{4n+1}{n}$.
   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n} = 4$.
   De même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{n} = 4$.
   D'après le théorème des gendarmes on a alors que (v_n) est convergente vers 4.

Exercice 3. Quelle est la nature de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 3$?
La suite est de la forme $an + b$ donc elle est arithmétique de raison 2.

Calculer la somme de ses 10 premiers termes.
On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 10 \times \dfrac{u_0 + u_9}{2} = 10 \times \dfrac{-3 + 15}{2} = 60$.

Interrogation n°12

Exercice 1. ROC

Théorème 2 :
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

***Preuve* :**
D'après le théorème précédent, on a :

$$u_n = u_0 q^n \qquad \text{et} \qquad u_p = u_0 q^p$$

donc, puisque $q \neq 0$, $u_0 = \dfrac{u_p}{q^p}$; d'où $u_n = \dfrac{u_p}{q^p} q^n = u_p \times q^{n-p}$

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1 \end{cases} \qquad \text{et } v_n = \frac{3\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - 5n}{n^2}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
   $u_1 = u_0 + 0 - 1 = 1$ et $v_1 = \dfrac{3\cos\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) - 5 \times 1}{1^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 5$

2. Montrer que (u_n) est une suite croissante à partir de $n = 1$.
   On a $u_{n+1} = u_n + n - 1 \iff u_{n+1} - u_n = n - 1 > 0$ pour tout $n \geq 1$ donc (u_n) est croissante à partir de $n = 1$.

3. Montrer que la suite (v_n) est convergente i.e qu'elle admet une limite que l'on déterminera.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{-3 - 5n}{n^2} \leq v_n \leq \dfrac{3 - 5n}{n^2}$.
   Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{-3 - 5n}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{5n}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-5}{n} = 0$
   De même $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{3 - 5n}{n^2} = 0$.
   D'après le théorème des gendarmes on a alors que (v_n) est convergente vers 0.

Exercice 3. Quelle est la nature de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n + 1$?
La suite est le la forme $an + b$ donc elle est arithmétique de raison -3.

Calculer la somme de ses 10 premiers termes. On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 10 \times \dfrac{u_0 + u_9}{2} = 10 \times \dfrac{1 + (-26)}{2} = -125$.