Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Interrogation n°11

Exercice 1. (4 points)

Quel est le nombre dérivé de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = -2x + 3$ et $a = 4$

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 4 :

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{-2(4+h) + 3 - (-2 \times 4 + 3)}{h} = \frac{-8 - 2h + 3 + 8 - 3}{h} = \frac{-2h}{h} = -2$$

   On détermine la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} -2 = -2$$

   Il s'agit d'un nombre réel donc c'est le nombre dérivé de f en 4 : $f'(4) = -2$

2. $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $a = 3$

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 3 :

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2 - 5(3+h) + 3 - (3^2 - 5 \times 3 + 3)}{h} \\ &= \frac{9 + 6h + h^2 - 15 - 5h + 3 - 9 + 15 - 3}{h} \\ &= \frac{h + h^2}{h} = \frac{h}{h} + \frac{h^2}{h} = 1 + h \end{aligned}$$

   On détermine la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} 1 + h = 1$$

   Il s'agit d'un nombre réel donc c'est le nombre dérivé de f en 3 : $f'(3) = 1$

Exercice 2. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer l'existence de $f'(3)$ et donner sa valeur.

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 3 : $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$.

   Si on veut calculer la limite de cette expression quand h tend vers 0, on constate qu'il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».
   Pour modifier son écriture, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par l'expression conjuguée du numérateur, à savoir $\sqrt{3+h} + \sqrt{3}$.
   Ainsi on reconnait au numérateur l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
   Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} \times \frac{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3+h})^2 - (\sqrt{3})^2}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \frac{3 + h - 3}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

On détermine alors la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Il s'agit d'un nombre réel donc c'est le nombre dérivé de f en 3 : $f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

   On détermine alors la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

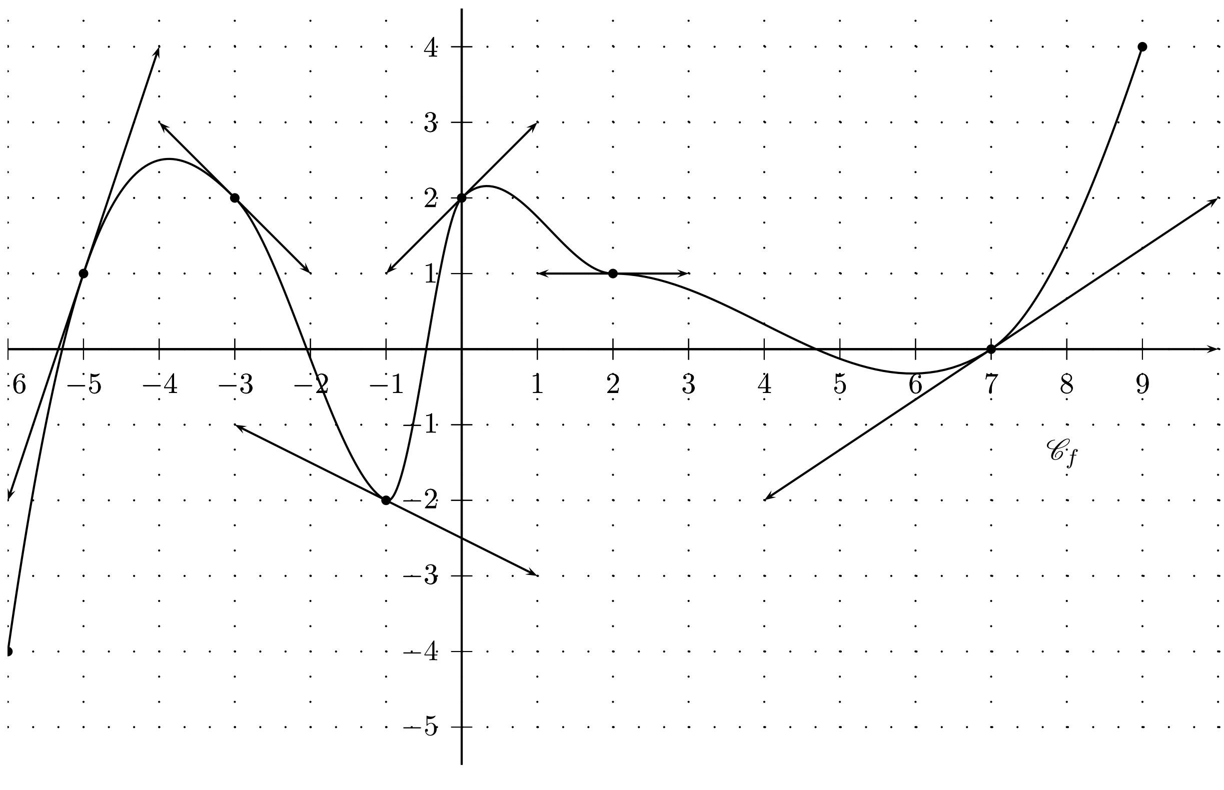
   Il ne s'agit pas d'un nombre réel f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3. (3 points)

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-5)$ $f'(-3)$ $f'(-1)$ $f'(0)$ $f'(2)$ $f'(7)$



$f'(a)$, lorsqu'il existe, correspond au coefficient directeur de la tangente T_a à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a. On le lit graphiquement, en utilisant deux points de la droite :

$$f'(a)=\frac{variation\,verticale}{variation\,horizontale}$$

Il faut tenir compte des signes des variations ! !

Aussi on trouve :

$$f'(-5)=3\qquad f'(-3)=-1\qquad f'(-1)=-\frac{1}{2}\qquad f'(0)=1\qquad f'(2)=0\qquad f'(7)=\frac{2}{3}$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Interrogation n°11

Exercice 1. (4 points)

Quel est le nombre dérivé de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = -2x + 3$ et $a = 3$

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 3 :

   $$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{-2(3+h) + 3 - (-2 \times 3 + 3)}{h} = \frac{-6 - 2h + 3 + 6 - 3}{h} = \frac{-2h}{h} = -2$$

   On détermine la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} -2 = -2$$

   Il s'agit d'un nombre réel donc c'est le nombre dérivé de f en 3 : $f'(3) = -2$

2. $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $a = 2$

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 2 :

   $$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 5(2+h) + 3 - (2^2 - 5 \times 2 + 3)}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 - 10 - 5h + 3 - 4 + 10 - 3}{h} \\ &= \frac{-h + h^2}{h} = \frac{-h}{h} + \frac{h^2}{h} = -1 + h \end{aligned}$$

   On détermine la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} -1 + h = -1$$

   Il s'agit d'un nombre réel donc c'est le nombre dérivé de f en 2 : $f'(2) = -1$

Exercice 2. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer l'existence de $f'(3)$ et donner sa valeur.

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 3 : $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$.

   Si on veut calculer la limite de cette expression quand h tend vers 0, on constate qu'il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

   Pour modifier son écriture, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par l'expression conjuguée du numérateur, à savoir $\sqrt{3+h} + \sqrt{3}$.

   Ainsi on reconnait au numérateur l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

   Cela donne

   $$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} \times \frac{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3+h})^2 - (\sqrt{3})^2}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \frac{3 + h - 3}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

On détermine alors la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Il s'agit d'un nombre réel donc c'est le nombre dérivé de f en 3 : $f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

   On calcule le taux de variation de la fonction f en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

   On détermine alors la limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

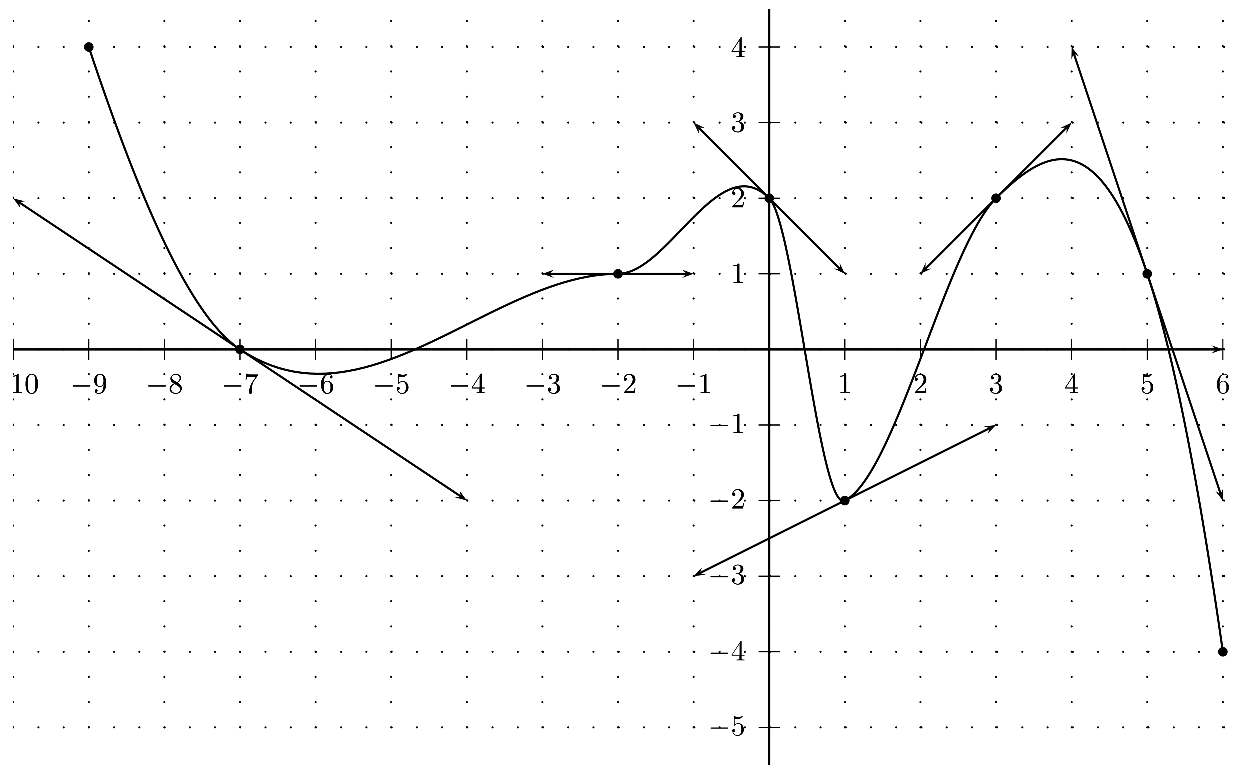
   Il ne s'agit pas d'un nombre réel f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3. (3 points)

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-7) \qquad f'(-2) \qquad f'(0) \qquad f'(1) \qquad f'(3) \qquad f'(5)$$



$f'(a)$, lorsqu'il existe, correspond au coefficient directeur de la tangente T_a à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a. On le lit graphiquement, en utilisant deux points de la droite :

$$f'(a)=\frac{variation\,verticale}{variation\,horizontale}$$

Il faut tenir compte des signes des variations ! !

Aussi on trouve :

$$f'(-7)=-\frac{2}{3} \qquad f'(-2)=0 \qquad f'(0)=-1 \qquad f'(1)=\frac{1}{2} \qquad f'(3)=1 \qquad f'(5)=-3$$