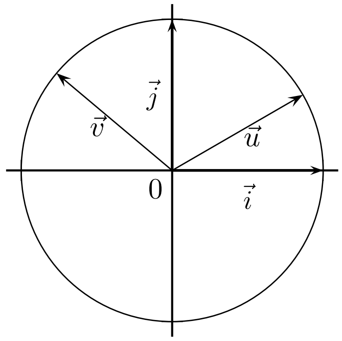
DS 9 : Produit Scalaire

Exercice 1. ROC (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que :

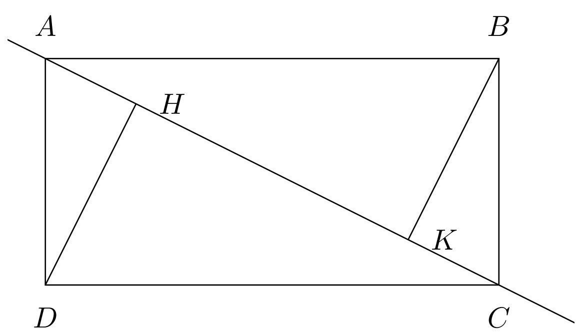
$$(\vec{i};\vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{i};\vec{v}) = b$$



1. En utilisant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ montrer que $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
2. En remarquant que $(\vec{u};\vec{v}) = b - a$ et en utilisant une autre caractérisation du produit scalaire, montrer que $\vec{u}.\vec{v} = cos(a-b)$.
3. En déduire que pour tous réels a et b on a
$$cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
4. On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
Calculer alors la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.
5. On remarque que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.
Calculer alors la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2. (3 points)

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = L$ et de largeur $AD = l$. On appelle K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADC.



1. En utilisant une relation de Chasles judicieuse pour chacun des deux vecteurs, montrer que
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = L^2 - l^2$$
2. En utilisant une autre caractérisation du produit scalaire, montrer que
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = HK\sqrt{L^2 + l^2}$$

Exercice 3. (2 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$.
Construire le triangle ABC. *Justifier la construction par un calcul*

Exercice 4. (3 points)

DEF est un triangle dans lequel $DE = 2$ et $DF = 3$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 4$.

Démontrer que ce triangle est rectangle en E [1].

Exercice 5. (7 points)

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-2;0)$, $B(7;2)$, $C(3;4)$ et $\Omega(2;-3)$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{BAC}$ est-il droit ?
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r = 5$
4. Démontrer que $A \in \mathscr{C}$

Exercice 6. (7 points)

Dans un repère orthonormé, on donne les quatre points :

$$A\left(8;-\frac{11}{2};2\right) \quad B\left(8;\frac{9}{2};\frac{19}{2}\right) \quad C\left(-2;9;\frac{7}{2}\right) \quad D(-2;-1;-4)$$

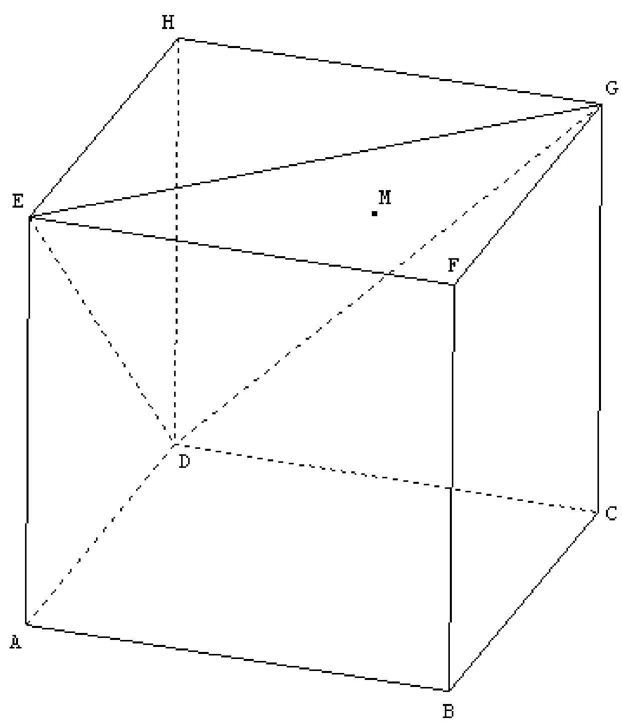
1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. Que pouvez-vous en conclure sur la nature de $ABCD$?
3. Calculer AB et AD. Que pouvez-vous en conclure sur la nature de $ABCD$?
4. Calculer les coordonnées du centre I de $ABCD$.
5. Calculer les coordonnées du barycentre G des points $(A;3)$, $(B;-2)$ et $(C;1)$.

Exercice 7. (3 points)

Soit le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous et M est un point de $[HF]$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle à (DEG) passant par M.

Construire la section du cube avec le plan $\mathcal{P}$ sur la figure ci-dessous *(il s'agit d'un hexagone)*.



1. On pourra utiliser le théorème d'Al-Kashi : Dans un triangle ABC on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$