DS 9 : Correction

Exercice 1. ROC (5 points)

1. $\vec{u}(\cos a; \sin a)$ et $\vec{v}(\cos b; \sin b)$ donc
$$\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

2. $(\vec{u}; \vec{v}) = b - a$ donc
$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$$

3. Pour tous réels a et b on a $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\vec{u}.\vec{v} = \cos(b-a)$. Donc
$$cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

4. On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
Alors $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

5. On remarque que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
Alors $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{-\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{-\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

Exercice 2. (3 points)

1.
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AD} \\
&= CD \times BA \times \cos(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{BA}) + 0 + 0 + DA \times AD \times \cos(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{AD}) \\
&= L \times L \times \cos(0) + l \times l \times \cos(\pi) \\
&= L^2 - l^2
\end{aligned}$$

2. H est le projeté orthogonal de D sur la droite (AC) et K celui de B sur (AC) donc
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{KH}$$
De plus dans le triangle ABC rectangle en B on trouve $AC = \sqrt{L^2 + l^2}$. Donc finalement :
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = CA \times KH \times \cos(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{KH}) = \sqrt{L^2+l^2} \times KH \times \cos(0) = \sqrt{L^2+l^2} \times KH$$

Exercice 3. $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$ (2 points)

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\
\iff\ & 9 = 3 \times 6 \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\
\iff\ & \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \\
\iff\ & (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

A partir de là, il est simple de construire une triangle dont on connait les mesures de deux côtés et de l'angle formé par ces deux côtés.

Exercice 4. $DE = 2$ et $DF = 3$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 4$. (3 points)

$$\begin{array}{rcl} EF^2 & = & DE^2 + DF^2 - 2DE \times DF \times \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) \\ & = & 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) \\ & = & 13 - 2 \times 6\cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) \\ \text{Or} \quad \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} & = & DE \times DF \times \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) \\ \Longleftrightarrow 4 & = & 2 \times 3 \times \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) \\ \Longleftrightarrow 4 & = & 6\cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) \end{array}$$

Donc on trouve $EF^2 = 13 - 2 \times 4 = 5 \Longrightarrow EF = \sqrt{5}$
On a alors que DF est le plus grand côté de DEF et $DF^2 = 9$ tandis que $DE^2 + EF^2 = 4 + 5 = 9$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on a que le triangle DEF est rectangle en E.

Exercice 5. $A(-2;0)$, $B(7;2)$, $C(3;4)$ et $\Omega(2;-3)$ (7 points)

1. On a $\overrightarrow{AB}\,(9;2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(5;4)$.
   Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \times 5 + 2 \times 4 = 53 \neq 0$. L'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas droit.
2. La médiatrice de $[BC]$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$, où I est le milieu de $[BC]$.
   Or $\overrightarrow{BC}(-4;2)$ et $I(5;3)$ donc $\overrightarrow{MI}(5-x;3-y)$. D'où :
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 & \Longleftrightarrow & -4(5-x) + 2(3-y) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 4x - 2y - 14 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 2x - y - 7 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & y = 2x - 7 \end{array}$$
3. L'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r = 5$ est
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$
4. $(-2-2)^2 + (0+3)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ Donc $A \in \mathscr{C}$

Exercice 6. $A\left(8; -\dfrac{11}{2}; 2\right)$ $B\left(8; \dfrac{9}{2}; \dfrac{19}{2}\right)$ $C\left(-2; 9; \dfrac{7}{2}\right)$ $D(-2;-1;-4)$ (7 points)

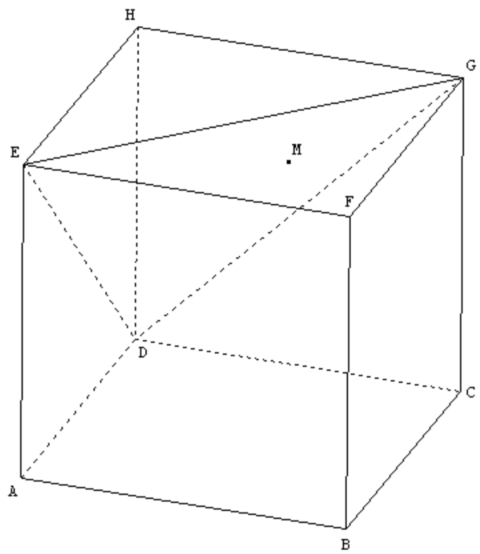
1. On a $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(0; 10; \dfrac{15}{2}\right)$ De plus $\overrightarrow{DC}\left(0; 10; \dfrac{15}{2}\right)$
   Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{AD}\left(-10; \dfrac{9}{2}; -6\right)$ D'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \times (-10) + 10 \times \dfrac{9}{2} + \dfrac{15}{2} \times (-6) = 0$
   Donc $ABCD$ est un rectangle.
3. $AB = \sqrt{0^2 + 10^2 + \left(\dfrac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{625}{4}} = 12.5$
   $AD\sqrt{(-10)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{\dfrac{625}{4}} = 12.5$ Donc $ABCD$ n'est pas un carré.
4. I est le milieu de $[AC]$ donc $x_I = \dfrac{6}{2} = 3$, $y_I = \dfrac{7}{4}$ et $z_I = \dfrac{11}{4}$

5.

$$x_G = \frac{3x_A - 2x_B + x_C}{3+(-2)+1} = \frac{24-16-2}{2} = 3 \qquad y_G = \frac{-\frac{33}{2} - 9 + 9}{2} = -\frac{33}{4} \qquad z_G = \frac{6 - 19 + \frac{7}{2}}{2} = -\frac{19}{4}$$

Exercice 7. (3 points)

Soit le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous et M est un point de $[HF]$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle à (DEG) passant par M.
Construire la section du cube avec le plan $\mathcal{P}$ sur la figure ci-dessous *(il s'agit d'un hexagone).*



1. Le point M appartient à la face (FEG) qui contient (EG). Donc, on trace (en trait plein) la parallèle à (EG) passant par M.
   Elle coupe les arêtes $[EF]$ et $[FG]$ respectivement en T et N.
2. Le point N appartient à la face (FGC) parallèle au plan (EHD) contenant (ED). Donc, on trace (en trait plein) la parallèle à (ED) passant par N.
   Elle coupe l'arête $[GC]$ en P.
3. Le point P appartient à la face (DHG) qui contient (DG). Donc, on trace (en trait pointillés) la parallèle à (DG) passant par P.
   Elle coupe l'arête $[DC]$ en Q.
4. Le point Q appartient à la face (ABC) parallèle au plan (EHG) contenant (EG). Donc, on trace (en trait pointillés) la parallèle à (EG) passant par Q.
   Elle coupe l'arête $[AD]$ en R.
5. Le point R appartient à la face (ADH) qui contient (ED). Donc, on trace (en trait pointillés) la parallèle à (ED) passant par R.
   Elle coupe l'arête $[AE]$ en S.
6. Les points S et T appartiennent à la face (ABF) donc on peut les relier (en trait plein).
   On constate que $(ST)//(DG)$ ce qui est logique.

L'hexagone est construit.