DS 8 : Suites

Exercice 1. (3 points)

On sait que la somme des n premiers entiers naturels n vaut $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Donc $S_1 = \dfrac{2010 \times 2011}{2}$.
Pouyr S_2 on utilise la suite (u_n) définie par $u_n = 6 \times 3^n$ qui est géométrique de raison 3. On a alors :

$$S_2 = u_1 + u_2 + \cdots + u_8 = 18 \times \frac{1-3^8}{1-3}$$

Exercice 2. (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. On sait que $u_{50} = u_0 + 50r$ et $u_{100} = u_0 + 100r$. D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} 406 = u_0 + 50r \\ 806 = u_0 + 100r \end{cases}$$

   Après calculs, on trouve : $r = 8$ et $u_0 = 6$
2. $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100} = 51 \times \dfrac{u_{50} + u_{100}}{2} = 51 \times \dfrac{1212}{2} = 51 \times 606$

Exercice 3. (4 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500€. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.
On note (C_n) la suite des primes avec $C_1 = 500$.

1. $C_2 = C_1 + C_1 \times \dfrac{2}{100} = C_1 \times 1.02 = 510$.
   $C_3 = C_2 \times 1.02 = 520.20$.
2. $C_{n+1} = C_n \times 1.02$. Donc la suite (C_n) est géométrique de raison 1.02.
3. La suite (C_n) diverge car il s'agit d'une suite géométrique de raison $1.02 > 1$.
4. $C_{20} = C_1 \times 1.02^{20-1} = 728.41$

Exercice 4. (4 points)

1. (a) $u_n = n^2 - n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   On a $u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$.
   Donc $u_{n+1} - u_n = n^2 + n - (n^2 - n) = n^2 + n - n^2 + n = 2n \geq 0$ pour tout entier naturel n.
   Donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

   (b) $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 2$. On a $v_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$.
   Comme $v_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut faire le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:
   Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{n+1} \geq 1$ pour tout entier $n \geq 2$.
   Donc (v_n) est croissante pour $n \geq 2$.
2. (a) $w_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
   (w_n) est une suite géométrique à termes positifs et de raison $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc (w_n) converge vers 0.

(b) $t_n = \dfrac{5n^5 - 8n^4 - 9}{6n^5 + 5n^3 - n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^5}{6n^5} = \dfrac{5}{6}$

Exercice 5. (6 points)

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ est la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ pour tout entier natuel n.

Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. (a) $u_1 = \dfrac{2u_0 + 3}{u_0 + 4} = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{2u_1 + 3}{u_1 + 4} = \dfrac{\frac{3}{2} + 3}{\frac{3}{4} + 4} = \dfrac{9}{2} \times \dfrac{4}{19} = \dfrac{18}{19}$

   (b) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\dfrac{1}{3}$ et $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = \dfrac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{3}{4} + 3} = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{15} = -\dfrac{1}{15}$

2. (a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \dfrac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \dfrac{\frac{2u_n + 3 - (u_n + 4)}{u_n + 4}}{\frac{2u_n + 3 + 3(u_n + 4)}{u_n + 4}} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 4} \times \dfrac{u_n + 4}{5u_n + 15} = \dfrac{1}{5}v_n$

   Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{3}$

   (b) Donc on a $v_n = v_0 \times q^n = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}$.

3. (a) Après calculs on trouve $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \iff u_n = \dfrac{3v_n + 1}{1 - v_n}$ pour $v_n \neq 1$ (ce qui est toujours le cas, car $v_n < 0$ pour tout n.

   (b) Donc $u_n = \dfrac{3 \times \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}\right) + 1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}\right)} = \dfrac{-\frac{1}{5^n} + 1}{1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}} = \dfrac{-1 + 5^n}{5^n} \times \dfrac{3 \times 5^n}{3 \times 5^n + 1} = \dfrac{3(5^n - 1)}{3 \times 5^n + 1}$

   Ainsi $u_5 = \dfrac{3(5^5 - 1)}{3 \times 5^5 + 1} = \dfrac{9372}{9376} = \dfrac{2343}{2344}$