DS 7 : Probabilités

Exercice 1. (1 point)

Un dé à six faces numérotées de 1 à 6 est truquée de la façon suivante :

- $P(1) = P(2)$
- $P(2) = \frac{2}{3}P(3)$
- $P(3) = P(4)$
- $P(4) = \frac{2}{3}P(5)$
- $P(5) = P(6)$

Calculer $P(1)$.

Exercice 2. (10 points)

Un sac contient 5 jetons :
- Un bleu valant 3 points
- Deux rouges valant chacun 2 points
- Deux verts valant chacun 1 point

1. On tire un jeton au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 points ?
2. On tire un jeton, puis un deuxième sans remettre le premier dans le sac.
   (a) Faire un arbre indiquant tous les tirages possibles.
   On notera B3 le fait de tirer un jeton bleu à trois points, R2 celui de tirer un jeton rouge à deux points, etc
   (b) En déduire le cardinal de l'univers.
   (c) Soient les événements suivants :
   - A = « Tirer deux jetons de couleurs différentes »
   - B = « Obtenir exactement 4 points »
   - C = « Obtenir au moins 4 points »
   - D = « Tirer aucun jeton vert »

   Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.
   (d) Décrire l'événement $A \cup B$ et trouver $P(A \cup B)$.
   (e) Décrire l'événement $A \cap B$ et *déduire* de la question précédente $P(A \cap B)$.
   (f) Décrire l'événement $\bar{D}$ et *déduire* $P(\bar{D})$ de $P(D)$.

Exercice 3. (9 points)

Une boîte contient six boules rouges et n boules blanches. Un jeu consiste à tirer successivement, sans remise, deux boules de la boîte. Si les deux boules ont la même couleur, le joueur gagne 1€ ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1€. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique du joueur.

1. On suppose que $n = 3$.
   (a) Calculer les probabilités d'obtenir deux boules :
      i. de même couleur
      ii. de couleurs différentes
   (b) Décrire alors sous forme d'un tableau la loi de la variable aléatoire X.
   (c) Calculer alors $E(X)$ et $\sigma(X)$.
   (d) Le jeu est-il équitable ? Est-il risqué ? (Justifier)
2. On suppose désormais que $n \geq 2$.
   (a) Exprimer en fonction de n les probabilités des événements $(X = 1)$ et $(X = -1)$
   (b) Montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est telle que
   $$E(X) = \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)}$$
   (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?
   (d) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il défavorable ?

Exercice 4. Bonus *Ne comptera que si le reste du devoir est traité en **entier** !* (2 points)

Le problème du chevalier de Méré

Le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres pose le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal. « Qu'est ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés ? »

1. On lance un dé quatre fois de suite.
   (a) Quel est le nombre d'issues de l'expérience (on tiendra compte de l'ordre) ?
   (b) A est l'événement : « Obtenir au moins un six ».
   Définir l'événement $\bar{A}$ et calculer sa probabilité.
   En déduire celle de A.
2. On lance maintenant deux dés 24 fois de suite.
   (a) Montrer que le nombre d'issues de l'expérience est 36^{24}.
   (b) B est l'événement : « Obtenir au moins un double-six ».
   Définir l'événement $\bar{B}$ et calculer sa probabilité.
   En déduire celle de B.
3. Répondre au chevalier de Méré.