DS 6 : Dérivation

Exercice 1. ROC : **2 points**

Calculons le taux de variation de f pour $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Regardons sa limite quand h tend vers 0.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Or $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est un nombre fini pour $x \in \mathbb{R}^*$ donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2. Lecture Graphique **3 points**

1. $$f'(-3) = -2 \qquad f'(-1) = \frac{3}{2} \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(6) = -\frac{2}{3}$$
2. La tangente au point d'abscisse 4 a un coefficient directeur strictement négatif, donc le nombre $f'(4)$ sera négatif strictement

Exercice 3. Quelques dérivées **3 points**

1. $i(x) = (1-3x)^5$ sur $I = \mathbb{R}$. Donc $i'(x) = 5 \times (-3) \times (1-3x)^4 = -15(1-3x)^4$ pour tout $x \in I$
2. $j(x) = \sin(x) + 2 + \frac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}^*$. Donc $j'(x) = \cos(x) - \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in I$
3. $k(x) = \sqrt{4x-1}$ sur $I = \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$. Donc $k'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$ pour tout $x \in I$

<u>Exercice</u> 4. Etude d'une fonction polynôme de degré 3 **6 points**

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

2. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times 1 = 4$
   Donc $x_1 = \dfrac{4-2}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{6} = 1$. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{85}{27}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

4. Donc la courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisse 1 et $\dfrac{1}{3}$.
   En ces points, elle admet des extrema locaux respectivement de 3 et de $\dfrac{85}{27}$.
5. On a la relation $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$.
   Or $f'(2) = 5$ et $f(2) = 5$. Donc $T : y = 5(x-2) + 5$
6. Tracer dans le repère les tangentes horizontales trouvées précédemment, T puis $\mathscr{C}_f$ sur $[-1; 2]$.

<u>Exercice</u> 5. Etude d'une fonction homographique **6 points**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par :

$$g(x) = \frac{x-3}{2-4x}$$

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-4x} = -\dfrac{1}{4}$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-4x} = -\dfrac{1}{4}$

2. Donc la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$.
3. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim\limits_{X \to 0^-} \dfrac{-2,5}{X} = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{-2,5}{X} = -\infty$
4. Donc la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote verticale Δ d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

5. $g'(x) = \dfrac{1 \times (2-4x) - (-4)(x-3)}{(2-4x)^2} = \dfrac{-10}{(2-4x)^2}$

6. On constate que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. On obtient alors le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$