Devoir Surveillé 5 : Limites

2 points sont réservés à la rédaction

Exercice 1. (3 points)

Rappeler les résultats suivants :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} ax+b = +\infty$ si $a>0$

   et $\lim\limits_{x\to +\infty} ax+b = -\infty$ si $a<0$

Exercice 2. (2 points)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+2x^2-4x+2) = 2\times 1^3 + 2\times 1^2 - 4\times 1 + 2 = 2$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{3x}{2-x}\right) =?$

   On a $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x = 6^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x) = 0^-$.

   Donc $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{3x}{x-2}\right) = \lim\limits_{X\to 0^-}\left(\frac{6}{X}\right) - \infty.$

Exercice 3. (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1;2\}$ par $f(x) = \dfrac{(x-2)(2x^2-x-3)}{x^2-3x+2}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. On a $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)(2x^2-x-3) = 0\times 3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2} x^2-3x+2 = 0$.

   Donc on est face à une forme indéterminer du type « $\frac{0}{0}$ ».

   On doit factoriser le dénominateur pour simplifier l'expression rationnelle par $x-2$.

   Pour cela on pose $P(x) = x^2-3x+2$. Trouvons les racines de P.

   On a $\Delta = 9 - 4\times 1\times 2 = 1$. Donc $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{1}}{2\times 1} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{1}}{2\times 1} = 1$.

   Par conséquent on a $P(x) = (x-2)(x-1)$.

   On trouve alors que $f(x) = \dfrac{(x-2)(2x^2-x-3)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ pour tout $x\neq 2$.

   On a donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-3}{x-1} = \dfrac{3}{1} = 3$.

2. La limite de f en 2 est finie : la droite d'équation $x=2$ n'est pas une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)(2x^2-x-3)}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty.$

   La limite de f en $+\infty$ est infinie : il n'y a pas d'asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

4. $$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{2x^2-x-3}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{-2}{x-1} = \lim_{X\to0^+} \frac{-2}{X} = -\infty \qquad \text{avec } X = x-1$$
   $$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2-x-3}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-2}{x-1} = \lim_{X\to0^-} \frac{-2}{X} = +\infty \qquad \text{avec } X = x-1$$
   Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

<u>Exercice</u> 4. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3-5x^2+5x-5}{x^2+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a
   $$2x-5+\frac{3x}{x^2+1} = \frac{(2x-5)(x^2+1)+3x}{x^2+1} = \frac{2x^3+2x-5x^2-5+3x}{x^2+1} = \frac{2x^3-5x^2+5x-5}{x^2+1} = f(x)$$

3. $$\lim_{x\to-\infty} [f(x)-(2x-5)] = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$$

4. On étudie le signe de la différence entre $f(x)$ et $(2x-5)$ quand $x \to -\infty$, donc quand $x < 0$.
   On a $f(x)-(2x-5) = \dfrac{3x}{x^2+1}$.

   Quand $x < 0$ on a $\quad 3x < 0 \quad$ et $\quad x^2+1 > 0$.

   Donc finalement $f(x)-(2x-5) = \dfrac{3x}{x^2+1} < 0$.

   On conclut que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ en $-\infty$.