Correction DS 4 : Trigonométrie

ROC : **(1 point)**

Faire un schéma codé de la figure géométrique utilisée dans la démonstration des valeurs remarquables des sinus, cosinus et tangente de l'angle $\frac{\pi}{4}$.

On trace un carré de côté 1. La diagonale mesure $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et elle partage l'angle du carré en deux angles de $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 1. *Angles orientés de vecteurs et Relation de Chasles* **(5 points)**

1. ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

   (a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$

   (b) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$

   (c) $(5\overrightarrow{BC}, -2\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}$

2. $ABCDE$ est une ligne brisée telle que : $AB = 4 \quad ; \quad BC = 3 \quad ; \quad CD = 2 \quad ; \quad DE = 2$

$$\text{et } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\pi}{6} \quad ; \quad (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{3}$$

   (a)

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) \\
&= (-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (-\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) \\
&= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) - \pi \\
&= -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \pi \\
&= -2\pi \\
&\equiv 0\,[2\pi]
\end{aligned}$$

   (b) Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens.
   De plus, $AB = 4 = 2DE$. Donc $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2. *Trigonométrie* **(5 points)**

1. $A = \sin(2009\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi + x) + \sin(x) = -\sin(x) + \sin(x) = 0$

2. On donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) > 0$ car $0 < \frac{3\pi}{5} < \pi$.

et $\sin^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$

D'où $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = +\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

3. $\sqrt{2}\cos(x) - 1 = 0 \Longleftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Donc sur $I = [0; 2\pi]$ les solutions sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$
   (b) Et sur $I = [-\pi; \pi]$ les solutions sont les nombres de l'intervalles $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$

Exercice 3. *Coordonnées polaires* **(2 points)**

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, placer avec le plus de précision possible le point $A(-2\sqrt{3}, -2)$.
On a $\rho_A = \sqrt{(-2\sqrt{3}^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$.
On trace alors le cercle de centre O et de rayon 4. Le point A est sur ce cercle.
Comme son ordonnée vaut -2 et son abscisse est négative, on peut le placer facilement :
A est le point d'intersection du cercle et de la droite $y = -2$ qui a une abscisse négative.

Exercice 4. *Repérage polaire* **(7 points)**

M est un point de coordonnées polaires $\left(2; -\frac{\pi}{6}\right)$ et N son image par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. $x_M = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ et $y_M = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$
2. (a) $ON = OM = 2$ et
   $(\vec{i}; \overrightarrow{ON}) = (\vec{i}; \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$
   Donc $N\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$
   (b) $x_N = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ et $y_N = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
3. (a) $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$
   (b) Le triangle MON est rectangle isocèle en O.
   (c) Par conséquent, la droite (OI) est la médiane issue de O du triangle, mais aussi la bissectrice. Donc : $(\vec{i}; \overrightarrow{OI}) = (\vec{i}; \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$
   De plus, $OI = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4} + \frac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2}$.
   D'où $I\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{12}\right)$
4. Par conséquent la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{x_I}{\rho_I} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{y_I}{\rho_I} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$