Correction DS 3

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes : **5 points**

1. $x^2 + x - 8 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 32 = 33$. Par conséquent l'équation admet deux solutions :
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$$

2. $2x^2 - 3x - 6 \leq 0$: On cherche d'abord les racines de $2x^2 - 3x - 6$. $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 48 = 57$. Il y a donc deux racines :
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{57}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3-\sqrt{57}}{4}$$
On dresse alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{57}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{57}}{4}$		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 3x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\mathscr{S} = \left[\frac{3-\sqrt{57}}{4}; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right]$$

3. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$: Cette équation admet une solution évidente, qui est -1.
En effet $(-1)^3 + (-1)^2 - 1 + 1 = 0$. On peut donc factoriser $x^3 + x^2 + x + 1$ par $x + 1$:
$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 + bx + 1) = x^3 + (b+1)x^2 + (b+1)x + 1$$
Par identification on trouve $b = 0$, ce qui montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$$
Donc $x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \iff (x+1)(x^2+1) \iff x = -1$ En effet on a toujours $x^2 + 1 > 0$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. **7 points**

1. (a) $f(0) = 0^2 + 4 \times 0 - 1 = -1$

   (b) $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 = 20$, donc cette équation admet deux solutions qui sont :
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = 2+\sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4-\sqrt{20}}{2} = 2-\sqrt{5}$$

   (c) Les points communs entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses vérifient $f(x) = 0$. D'après (b) il y a deux points, notons les $A_1(2+\sqrt{5}; 0)$ et $A_2(2-\sqrt{5}; 0)$ L'éventuel point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées a pour abscisse 0 et pour ordonnée $f(0)$ (si ce calcul est possible !) D'après (a), ce point A_3 a pour coordonnées $(0; -1)$

2. $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ donc $S(-2; -5)$. Comme $a = 1 > 0$ la parabole C_f est tournée vers le haut donc le sommet S correspond à un minimum

3.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe de x^2+4x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On cherche x tel que $f(x) = y \iff x^2+4x-1 = 4x-4 \iff x^2 = -3$. Cette dernière équation n'a clairement pas de solution. La droite ne coupe jamais la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3. On lance verticalement une balle de tennis à la vitesse de 20 $m.s^{-1}$. **5 points**
La hauteur h (en mètres) atteinte par la balle en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -5t^2+20t+1,6$

1. La hauteur de la balle au départ est $h(0) = 1,6$ m. Au bout d'une seconde, c'est $h(1) = 16,6$ m
2. (a) On résout : $h(t) = 1,6 \iff -5t^2+20t = 0 \iff t(-5t+20) = 0$
$$\iff t = 0 \text{ ou } -5t+20 = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = 4$$
La balle atteindra une hauteur de 1,6 mètres au bout de 4 secondes sachant qu'elle est au départ à une hauteur de 1,6 mètres.
(b) On résout $h(t) = 21,6 \iff -5t^2+20t-20 = 0$
$$\Delta = b^2-4ac = 400-400 = 0$$
La balle atteindra la hauteur de 21,6 mètres à l'instant $t_1 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{-10} = 2$ secondes.
3. L'équation $h(t) = 21.6$ admet une solution double. Donc 21.6 est l'ordonnée du sommet de la parabole représentative de la fonction h. Donc la balle admet sa hauteur maximale 21.6m quand $t = 2$s.
4. On résout $h(t) = 0 \iff -5t^2+20t+1,6 = 0$
$$\Delta = b^2-4ac = 400+32 = 432 = 2\times 216 = 2^2\times 108 = 2^3\times 54 = 2^4\times 27 = 2^4\times 3^3$$
$t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20-12\sqrt{3}}{-10} = \dfrac{10+6\sqrt{3}}{5}$ ou $t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20+12\sqrt{3}}{-10} = \dfrac{10-6\sqrt{3}}{5}$
Comme $t_2 < 0$ seul t_1 est solution du problème et la balle retombera au sol au bout de $t_1 \simeq 4,1$ s

Exercice 4. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (4x^2+2)^2-(x^2+1)^2$ **3 points**

1. $P(x) = (x^2+1)^2-(4x^2+2)^2 = 16x^4+16x^2+4-(x^4+2x^2+2) = 15x^4+14x^2+2$. Donc P est une fonction polynôme de degré 4
2. Résoudre $15x^4+14x^2+3 = 0$. Pour cela posons $\gamma = x^2$ on a alors $\gamma^2 = x^4$ et
$$P(x) = 0 \iff 15\gamma^2+14\gamma+2 = 0$$
$\Delta = b^2-4ac = 196-120 = 76 = 2\times 38 = 2^2\times 19$, et donc il y a deux réels qui vérifient l'équation $15\gamma^2+14\gamma+2 = 0$:
$\gamma_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-14-2\sqrt{19}}{30} = \dfrac{-7-\sqrt{19}}{15} < 0$ et $\gamma_2 = \dfrac{-14+2\sqrt{19}}{30} = \dfrac{-7+\sqrt{19}}{15} < 0$
Comme γ_1 et γ_2 sont deux réels négatifs, l'équation $\gamma = x^2$ n'a pas de solution donc le polynôme P n'a pas de racine réelle.