Correction Devoir Surveillé 2 bis

Exercice 1. ROC : Prouver le résultat suivant : **3 points**

Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. On a :

$$\text{G barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Démonstration :

On a :

$$\begin{aligned}
\text{G barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) &\Longleftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\
&\Longleftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}\\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}\\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB}\\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}\\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \text{ possible puisque } \alpha+\beta \neq 0
\end{aligned}$$

Exercice 2. **5 points**

1. Soit G le barycentre de $(A,2)$, $(B,-2)$, $(C,1)$. On a :

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} &\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

   On peut alors construire le barycentre G facilement.

2. Le plan étant muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;7)$ et $B(3;3)$ (inutile de faire une figure). Calculer les coordonnées de :
   - $x_{G_1} = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $y_{G_1} = \dfrac{7+3}{2} = 5$. Donc $G_1\left(\dfrac{5}{2};5\right)$
   - $x_{G_2} = \dfrac{-1\times 2+3\times 3}{-1+3} = \dfrac{7}{2}$ et $y_{G_2} = \dfrac{-1\times 7+3\times 3}{-1+3} = 1$. Donc $G_2\left(\dfrac{7}{2};1\right)$
   - $x_{G_3} = \dfrac{1\times 2+1\times 3+1\times 0}{1+1+1} = \dfrac{5}{3}$ et $y_{G_3} = \dfrac{1\times 7+1\times 3+1\times 0}{1+1+1} = \dfrac{10}{3}$. Donc $G_3\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{10}{3}\right)$

Exercice 3. **3 points**

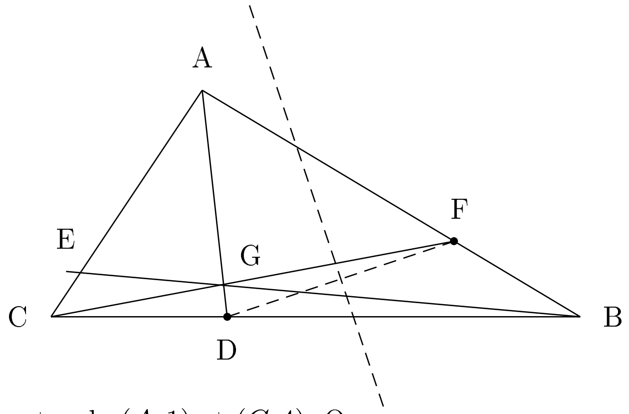
1. Comme H est le centre de gravité du triangle ABC on a :
   $H = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\} = bar\{(A,250);(B,250);(C,250)\}$.
   Donc par associativité on obtient $G = bar\{(H,750);(D,1000)\} = bar\{(H,3);(D,4)\}$.
   Donc les points G, H et D sont alignés.
2. On situe G grâce à la relation suivante : $\overrightarrow{HG} = \dfrac{4}{3+4}\overrightarrow{HD} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{HD}$

Exercice 4. **8 points**

Soient A, B et C trois points non alignés. On définit les points suivants :

$$E \text{ tel que } \overrightarrow{CE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}, \text{ et } F \text{ tel que } \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$D \text{ barycentre de } (B,2) \text{ et } (C,4), \text{ et } G \text{ barycentre de } (A,1), (B,2), \text{ et } (C,4)$$



1. (a) Soit U le barycentre de $(A,1)$ et $(C,4)$. On a

$$\overrightarrow{UA} + 4\overrightarrow{UC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{CU} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$$

Or on sait que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$.

Par unicité du barycentre $E = U$.

(b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} &\iff \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FA} \\ &\iff \frac{2}{3}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{FA} = \vec{0} \\ &\iff 2\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{FA} = \vec{0} \\ &\iff 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA} = \vec{0} \\ &\iff F \text{ barycentre de } (A,1) \text{ et } (B,2). \end{aligned}$$

(c) G est le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$, et $(C,4)$. Par associativité c'est aussi le barycentre de :

- $(F,3)$ et $(C,4)$ donc $G \in (CF)$
- $(E,5)$ et $(B,2)$ donc $G \in (EB)$
- $(A,1)$ et $(D,6)$ donc $G \in (AD)$

Finalement les droites (AD), (CF) et (BE) sont concourantes en G.

(d) Il suffit de tracer les droites (AD) et (CF). Elles se coupent en G. Sachant que $G \in (BE)$, on trace alors (BG). et on a E comme point d'intersection de (BG) et (AC).

2. *Le but de cette partie est de dessiner un lieu géométrique.*

(a) On a F barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$ et D barycentre de $(B,1)$ et $(C,2)$. Alors

$$\begin{aligned} &\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| \\ &\iff \| 3\overrightarrow{MF} \| = \| 3\overrightarrow{MD} \| \\ &\iff \| \overrightarrow{MF} \| = \| \overrightarrow{MD} \| \end{aligned}$$

L'ensemble des points M considédé est donc la médiatrice du segment $[DF]$.

(b)