Correction du DS 2

Exercice 1. ROC : Prouver le résultat suivant : **2 points**

Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ et H le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors :

$$G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \Longleftrightarrow G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

Remarque : *On veut démontrer l'associativité du barycentre, on ne peut donc pas utiliser ce résultat !!*

Démonstration :

Soit $H = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors : $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$

Soit $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ on a :

$$\begin{aligned}
& \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha\overrightarrow{GH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & (\alpha+\beta)\overrightarrow{GH} + +\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Exercice 2. **3 points**

1. Comme H est le centre de gravité du triangle ABC on a : $H = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$.
   Donc par associativité on obtient $G = bar\{(H,3);(D,4)\}$.
2. On situe G grâce à la relation suivante : $\overrightarrow{HG} = \dfrac{4}{3+4}\overrightarrow{HD} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{HD}$

Exercice 3. **4 points**

1. Par homogénéité on a $G = bar\{(A,2000);(B,2000);(C,3000)\} = bar\{(A,2);(B,2);(C,3)\}$
   Comme I est le milieu de $[AB]$ on a $I = bar\{(A,2);(B,2)\}$,
   Par associativité on a alors $G = bar\{(I,4);(C,3)\}$ ce qui implique $G \in (CI)$, et donc G, C et I sont alignés.
2. On a $x_I = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0$ et $y_I = \dfrac{0+2}{2} = 1$.
   On a $x_G = \dfrac{4\times 0 + 3\times 4}{4+3} = \dfrac{12}{7}$ et $y_G = \dfrac{4\times 1 + 3\times(-3)}{4+3} = -\dfrac{5}{7}$.

Exercice 4. **4 points**

1. Considérons $G = bar\{(A,2)(B,-1)(C,1)\}$, alors $\forall M \in \mathcal{P}$ on a :

   $$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

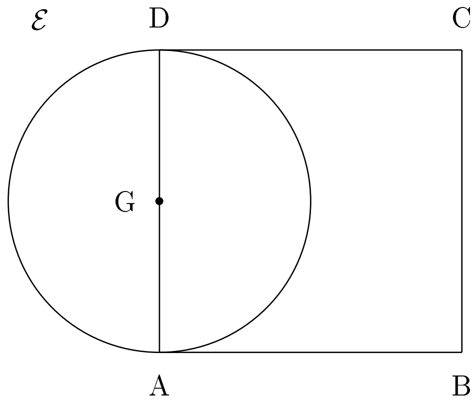
   Il vient :

   $$\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = AB \Longleftrightarrow \| 2\overrightarrow{MG} \| = AB \Longleftrightarrow \| \overrightarrow{MG} \| = \frac{AB}{2}$$

   $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M appartenant au cercle $\mathcal{C}$ de centre G et de rayon $\dfrac{AB}{2}$

2. Pour représenter $\mathcal{E}$, il faut aussi construire le barycentre G, on utilise pour cela la relation suivante :

$$\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



<u>Exercice</u> 5. **7 points**

1. On a G centre de gravité de ABC donc $G=bar\{(A,1),(B,1),(C,1)\}\iff\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
   De plus on a $Q=bar\{(A,1);(B,2)\}\iff\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}=\vec{0}$
   Et $S=bar\{(A,1);(C,2)\}\iff\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}=\vec{0}$.

$$\begin{array}{cl}\text{Donc} & \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\\ \iff & 2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\\ \iff & \overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{GQ}+2\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{GS}+2\overrightarrow{SC}=\vec{0}\\ \iff & 3\overrightarrow{GS}+3\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}=\vec{0}\\ \iff & 3\overrightarrow{GS}+3\overrightarrow{GQ}=\vec{0}\end{array}$$

   Donc G est l'isobarycentre de S, Q : c'est le milieu du segment $[SQ]$.
2. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\iff\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}\iff-\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}\iff2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$
   Par unicité du barycentre on a donc $P=bar\{(A,2);(B,1)\}$
   De plus $\overrightarrow{BV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\iff3\overrightarrow{BV}=2\overrightarrow{BV}+2\overrightarrow{VC}\iff\overrightarrow{VB}+2\overrightarrow{VC}=\overrightarrow{0}$
   Par unicité du barycentre on a donc $V=bar\{(C,2);(B,1)\}$.
3. Le milieu de $[PV]$ est l'isobarycentre de P et V, or on a :

$$\begin{aligned}bar\{(P,1);(V,1)\} &= bar\{(P,3);(V,3)\}=bar\{(A,2);(B,1);(B,1);(C,2)\}\\ &= bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\}=bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}=G\end{aligned}$$

   Justifions l'égalité : $K=bar\{(A,2);(B,1);(B,1);(C,2)\}=bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\}$:
   En effet on a : $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}\iff2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$
4. $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\iff\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}+\frac{1}{3}\overrightarrow{RC}\iff-\frac{2}{3}\overrightarrow{RA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{0}\iff2\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{0}$
   Donc par unicité du barycentre $R=bar\{(A,2);(C,1)\}$
   De plus $\overrightarrow{BU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\iff3\overrightarrow{BU}=\overrightarrow{BU}+\overrightarrow{UC}\iff2\overrightarrow{UB}+\overrightarrow{UC}=\overrightarrow{0}$
   Donc par unicité du barycentre $U=bar\{(B,2);(C,1)\}$.
5. En appliquant les questions 1, 3 et 5, les droites (PV), (RU) et (SQ) sont concourrantes en G.