Devoir Surveillé 1 : Les fonctions

Exercice 1. (1 point) **ROC :**
Prouver le résultat suivant :

Si f est décroissante sur I et $\lambda < 0$ alors λf est croissante sur I.

Exercice 2. (5 points) **Représentations graphiques :**
Soient les fonctions suivantes

1. $f_1 : x \longmapsto x^2 - 2$
2. $f_2 : x \longmapsto -x^2 + 2$
3. $f_3 : x \longmapsto (x-4)^2 + 3$
4. $f_4 : x \longmapsto -(x-4)^2 + 3$

Dans chaque cas, expliquer par quelle(s) transformation(s) on obtient la courbe représentant la fonction f_i à partir de celle de la fonction carré.

Exercice 3. (4,5 points) **Composition :**
Déterminer dans chaque cas $g \circ f$ et son ensemble de définition :

1. $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$
3. $f(x) = -7\sqrt{x}$ et $g(x) = x - 1$

Exercice 4. (5 points) **Opérations sur les fonctions :**
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1. Décomposer f comme la somme de deux fonctions strictement croissantes u et v sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$ (on citera la propriété utilisée).
3. Définir la fonction $h = -5g + 1$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction g et en déduire celui de la fonction h.

Exercice 5. (4.5 points) **Général :**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$

1. Ecrire f comme la composée de fonctions de référence.
2. Démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par la méthode de votre choix.
3. Démontrer que f est minorée par 2 sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 5$