CORRECTION DS 1 : LES FONCTIONS

Exercice 1. (1 point) **ROC :**

Si f est décroissante sur I et $\lambda < 0$ alors λf est croissante sur I.

Démonstration :

Soit f une fonction décroissante sur I et $a, b \in I$ tels que :

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Longleftrightarrow \quad f(a) \geq> f(b) \quad \text{car } f \text{ est décroissante sur } I \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda f(a) \leq \lambda f(b) \quad \text{car } \lambda < 0 \end{aligned}$$

Donc f conserve l'ordre sur I, c'est-à-dire f est croissante sur I.

Exercice 2. (5 points) **Représentations graphiques :**

1. $f_1 : x \longmapsto x^2 - 2$: translation de vecteurs $-2\vec{j}$
2. $f_2 : x \longmapsto -x^2 + 2$: symétrie d'axe celui des abscisses, puis translation de vecteurs $+2\vec{j}$
3. $f_3 : x \longmapsto (x-4)^2 + 3$: translation de vecteurs $+4\vec{i}$ puis translation de vecteurs $3\vec{j}$
4. $f_4 : x \longmapsto -(x-4)^2 + 3$: translation de vecteurs $+4\vec{i}$, puis une symétrie d'axe celui des abscisses, puis translation de vecteurs $3\vec{j}$

Exercice 3. (4,5 points) **Composition :**

1. $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$: $g \circ f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$ et $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$: $g \circ f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$
3. $f(x) = -7\sqrt{x}$ et $g(x) = x - 1$: $g \circ f(x) = -7\sqrt{x} - 1$ et $D_{g \circ f} = \mathbb{R}^+$

Exercice 4. (5 points) **Opérations sur les fonctions :**
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1. On prend par exemple $u : x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto 2x - 1$. Ces deux fonctions sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$ et on a bien $f = u + v$.
2. Si deux fonctions sont strictement croissantes sur un intervalle I alors leur somme est une fonction strictement croissante sur I.
   Ici on a donc clairement f strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $h(x) = -5g(x) + 1 = -5\sqrt{x} + 1$.

4.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$	

Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $-5g$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}+$.
Puis on effectue une translation de la courbe repr ésentative de $-5g$ de vecteur $+1\vec{j}$ pour obtenir celle de h (ce qui ne change pas le sens de variation).
Donc le tableau de variations de h est le suivant :

x	0	$+\infty$
$h(x)$	1 $\searrow$	

Exercice 5. (4.5 points) **Général :**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$

1. On pose $u : x \mapsto x - 1$, $v : x \mapsto x^2$ et $w : x \mapsto 3x + 2$ définies sur $\mathbb{R}$. Alors on a $f = w \circ v \circ u$.

2. Pour tout $x \geq 1$ on a $u(x) \geq 0$. Donc $u([1; +\infty[) = R^+$.

   Pour tout $y \geq 0$ on a $v(y) \geq 0$. Donc $v(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ et $v \circ u([1; +\infty[) = \mathbb{R}^+$.

   Or u est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. De plus v est strictement croissante sur $u([1; +\infty[) = \mathbb{R}^+$.

   Donc $v \circ u$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

   Enfin, w est strictement croissante sur $v \circ u([1; +\infty[) = \mathbb{R}^+$.

   Donc $f = w \circ v \circ u$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

   Attention !!. *Dans la méthode apprise en seconde, vous devez tenir compte de l'intervalle de départ (sinon ici vous prenez le carré de nombres qui ne sont pas forcément positifs, donc l'ordre est inconnu). De plus vous devez écrire des équivalences ($\Longleftrightarrow$).*

3. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(x-1)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 3(x-1)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 3(x-1)^2 + 2 \geq 2$.
   Donc f est minorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

4.

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Longleftrightarrow 3(x-1)^2 + 2 = 5 \\ &\Longleftrightarrow 3(x-1)^2 = 3 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow x - 1 = 1 \text{ ou } x - 1 = -1 \\ &\Longleftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

   Donc $S = \{0; 2\}$.