Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Correction de l'interrogation n°13

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :

Propriété 1 :
On considère une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$ et A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}$
Une équation de la tangente au point d'abscisse a d'une fonction f dérivable en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve

On considère une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}$. D'après la partie précédente, l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ passant par a est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $A(a; f(a))$ est un point de T, les coordonnées de A vérifient l'équation de T :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

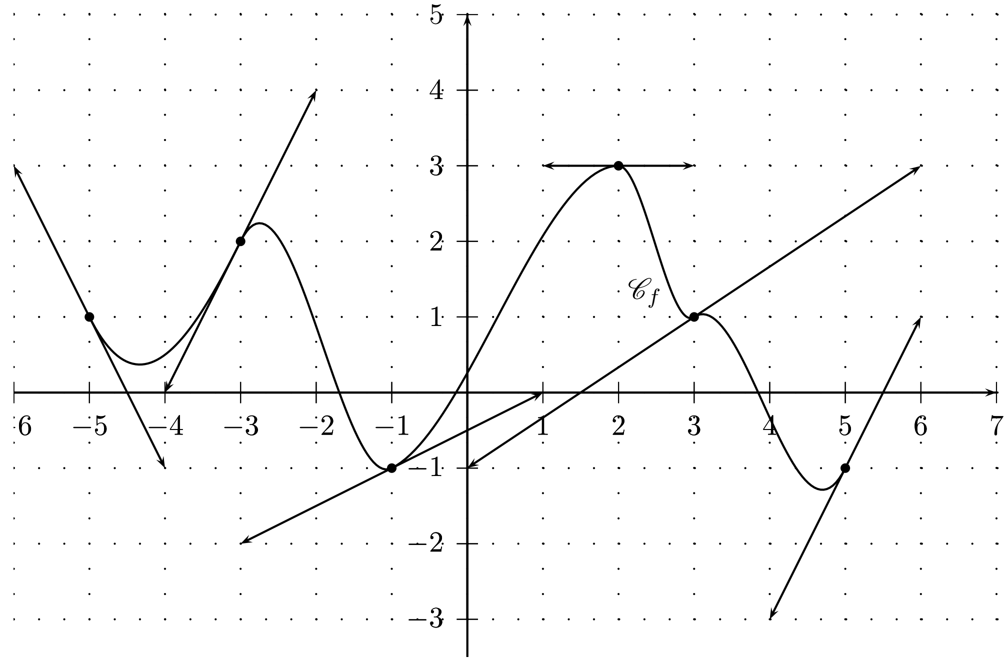
Au final l'équation de T est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice 2. Quel est le nombre dérivé de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -1$
   Pour $h \neq 0$ on calcule le taux de variation de f entre -1 et $-1+h$:
   $$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{1}{h(a+h)} + \frac{1}{h} = \frac{1}{h(-1+h)} + \frac{-1+h}{h(-1+h)} = \frac{1-1+h}{h(-1+h)} = \frac{1}{-1+h}$$
   Et,
   $$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-1+h} = -1$$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $a = 1$
   Pour $h \neq 0$ on calcule le taux de variation de f entre 1 et $1+h$:
   $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) + 5 - 1 - 2 - 5}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h + 5 - 1 - 2 - 5}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4+$$
   Et,
   $$f'(1) = \lim_{h\to 0} 4 + h = 4$$

Exercice 3. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
On lit, en observant le quadrillage, les nombres dérivés suivants :

$$f'(-5) = -2 \qquad f'(-3) = 2 \qquad f'(-1) = \frac{1}{2} \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(3) = \frac{2}{3} \qquad f'(5) = 2$$



5
4
3
2
1
−1
−2
−3
6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
$\mathscr{C}_f$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°13

Exercice 1. ROC
Démontrer la propriété suivante :

Propriété 2 :
On considère une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$ et A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}$
Une équation de la tangente au point d'abscisse a d'une fonction f dérivable en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve
On considère une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}$. D'après la partie précédente, l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ passant par a est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $A(a; f(a))$ est un point de T, les coordonnées de A vérifient l'équation de T :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de T est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice 2. Quel est le nombre dérivé de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et $a = 1$ Pour $h \neq 0$ on calcule le taux de variation de f entre 1 et $1+h$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) + 1 - 1 + 3 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 3 - 1}{h} = \frac{-h + h^2}{h} = -1+h$$

Et,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} -1 + h = -1$$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 2$ Pour $h \neq 0$, on calcule le taux de variation de f entre 2 et $2+h$:

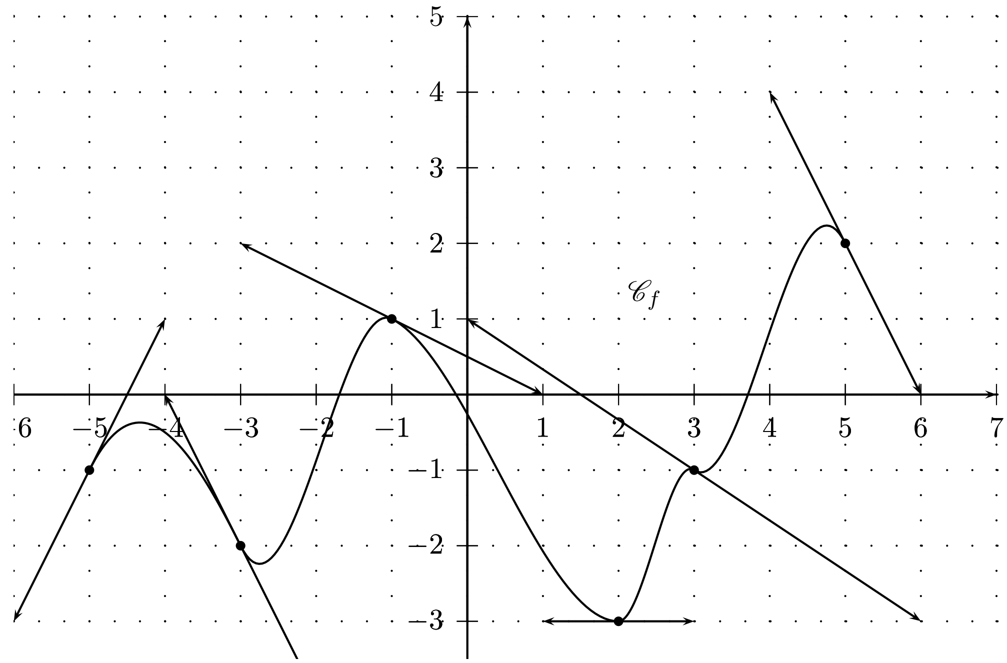
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \times \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

Et,

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 3. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
On lit, en observant le coefficient directeur des tangentes, les nombres dérivés suivants :

$$f'(-5) = 2 \qquad f'(-3) = -2 \qquad f'(-1) = -\frac{1}{2} \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(3) = -\frac{2}{3} \qquad f'(5) = -2$$



$\mathscr{C}_f$