Correction du devoir Surveillé 8 : Produit Scalaire

Exercice 1. ROC (2 points)

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 :
Soit A et B deux points quelconque du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :

1. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
2. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Preuve

1. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$
   Or $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = -IA\times IB = -\dfrac{AB}{4}$ et $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$, par conséquent :
   $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$
2. $MA^2+MB^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 = MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} = 2MI^2+2IA^2 = 2MI^2+\dfrac{1}{2}AB^2$

Exercice 2. (2 point)

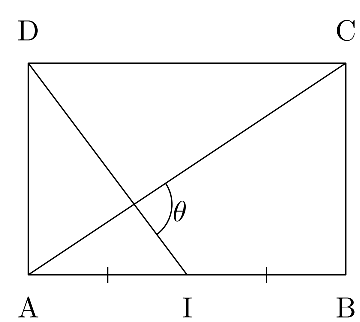
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne $A(0;0)$, $B(2;1)$ et $C(-1;3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

On a :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2+3 = 1 \neq 0$$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas orthogonaux.

Exercice 3. (4 point)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. I est le milieu de $[AB]$

1. Calculer AC et DI
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DI}$
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{AC}\right)$ à 0,001 près en degrés.



Preuve

- Exercice fait en classe.

Exercice 4. (5 points)

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-2;0)$, $B(-7;5)$, $C(3;-4)$ et $\Omega(2;-3)$

1. L'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r=5$ est :
$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$
2. $A \in \mathscr{C}$ car $(-2-2)^2+(0+3)^2=25$
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$
$M(x;y) \in \mathscr{C} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega}=0 \iff -4(x+2)-3y=0 \iff -4x-8-3y=0 \iff 4x+3y=-8$
4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice Δ de $[BC]$. Le milieu O de $[BC]$ a pour coordonnées $(-2;0,5)$, donc :
$$M(x;y) \in \Delta \iff \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}=0 \iff 10(x+2)-9(y-0,5)=0$$
5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -5\times 5-5\times 4=-45 \neq 0$ donc l'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas droit.

Exercice 5. (3 points)

ABC est un triangle dans lequel $AB=3$ et $AC=7$. De plus $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$.
Démontrer que ce triangle est rectangle en B.[1]

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9 \iff \cos(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$
$$BC^2=9+49-42\times\frac{3}{7} \iff BC=\sqrt{40}$$

En appliquant la réciproque du théorème de Pythagor on a $BC^2+AB^2=40+9=49=AC^2$, ce qui prouve que le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice 6. (4 points)

Soit $[AB]$ un segment de 6 cm.

1. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=20$
Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=20 \iff AH=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$
Par conséquent on cherche l'ensemble des points M du plan tel que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HM}=0$$
L'ensemble cherché est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.
2. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-10$
Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=-10 \iff -AH=\frac{-10}{6} \iff AH=\frac{5}{3}$
Par conséquent on cherche l'ensemble des points M du plan tel que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HM}=0$$
L'ensemble cherché est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

1. On pourra utiliser le théorème d'Al-Kashi

3. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 50$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 50 \Longleftrightarrow MI = 4$$

   L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I et de rayon 4.

4. Représenter ces trois ensembles.