Correction du devoir Surveillé 5 : Dérivation

Exercice 1. ROC : **3 points**

1. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
2. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0 (elle est pourtant définie pour $x = 0$!)

Preuve

1. Pour $h \neq 0$ on calcule le taux de variation de f entre x et $x+h$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, aller c'est parti :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

et ce taux de variation tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ lorsque h tend vers 0, par conséquent $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

2. Si $x = 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, et lorsque $h \to 0^+$ la limite de $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ vaut $+\infty$, par conséquent la fonction f n'est pas dérivable en 0

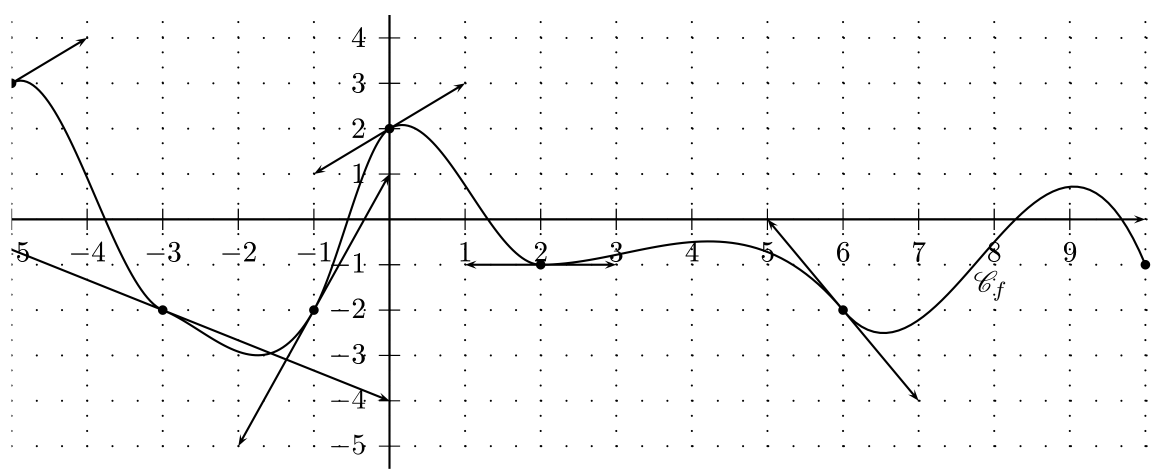
Exercice 2. Lecture Graphique **3 points**

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée ci-dessous.

1. On lit :

$$f'(-5) = 1 \qquad f'(-3) = -\frac{2}{3} \qquad f'(-1) = 2 \qquad f'(0) = 1 \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(6) = -2$$

2. Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$, par contre la fonction f est strictement croissante sur $[2; 4,1]$, par conséquent $f'(4) > 0$



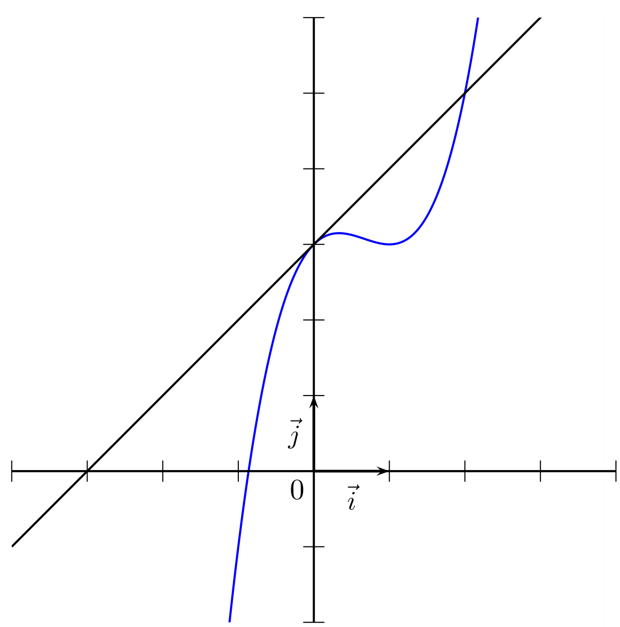
Exercice 3. Etude d'une fonction polynôme de degré 3 **7 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$. $\mathscr{C}_f$ est sa représentation graphique.

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
3. On étudie la signe de f' :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$
On en déduit les racines de f' :
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$$
On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{85}{27}$	↘	3	↗	$+\infty$

4. Comme f' s'annule en 1 et en $\frac{1}{3}$ en changeant de signe, f admet deux extremum locaux, un maximum local qui est $\frac{85}{27}$ et un minimum local qui est 3.
5. L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est de la forme :
$$\begin{aligned} & y = f'(0)(x-0) + f(0) \\ \iff & y = x + 3 \end{aligned}$$



6.

7. Pour tout $x > \frac{1}{3}$, on a $f(x) \geq 3$, par conséquent l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$, en revanche sur $I = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$ la fonction f est strictement croissante. De plus

la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$ et $f\left(\frac{1}{3} > 0\right)$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle I. Comme $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$ on a $\alpha \in [-1; 0]$
A l'aide de la calculatrice, on constate que $f(-0,9) < 0$ et $f(-0,8) > 0$, par conséquent

$$-0,9 < \alpha < -0,8$$

Exercice 4. Etude d'une fonction homographique **4 points**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \frac{1}{2}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}$$

1.
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{0,25 - 3}{2x - 1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{-2,75}{2x - 1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{0,25 - 3}{2x - 1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{-2,75}{2x - 1} = +\infty$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} - \frac{1}{2}$, $g'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2-3)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2 + 6}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 6}{(2x-1)^2}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R} - \frac{1}{2}$ on a $(2x-1)^2 > 0$. Le signe de g' est donc le même que celui de son numérateur.
   Etudions donc le signe du numérateur de f'
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 48 = -42$$
   On a donc $2x^2 - 2x + 6 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \frac{1}{2}$
4. Le tableau de variation de la fonction f est donc le suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'	$+$	‖	$+$
g	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Exercice 5. **3 points**

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0; 2]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$ sur I
Démontrer que $f \leq g$ sur I [1]

1. On pourra étudier les variations de $g - f$

Preuve

Comme $f' \leq g'$ sur I. On a pour tout $x \in I$

$$(f' - g')(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f'(x) - g'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f'(x) \leq g'(x)$$

De plus $(f - g)' = f' - g' \geq 0$, par conséquent la fonction $(f - g)$ est décroissante sur I. Autrement dit pour tout $x \in I$ on a :

$$(f - g)(0) \geq (f - g)(x) \Longleftrightarrow f(0) - g(0) \geq f(x) - g(x) \Longleftrightarrow 0 \geq f(x) - g(x) \Longleftrightarrow g(x) \geq f(x)$$

Cette dernière inégalité signifie que $f \leq g$ sur I.