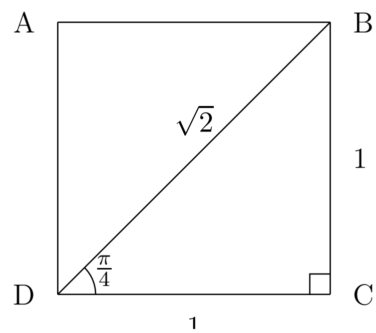
Correction du devoir Surveillé 4 : Trigonométrie

Exercice 1. ROC : Montrer que : **2 points**

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Démonstration :

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et de $\cos\frac{\pi}{4}$ on exploite la diagonale d'un carré de côté 1



Dans le triangle DCB rectangle en C, il vient :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De plus $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Exercice 2. **5 points**

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthornomal et $(O;\vec{i})$ un repère polaire.

On considère les points A de coordonnées polaires $(2;0)$ dans $(O;\vec{i})$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. I est le milieu de $[AB]$.

1. Notons $(x_a;y_a)$ les coordonnées cartésiennes, nous savons que :

$$x_a = \rho\cos\theta = 2\cos 0 = 2 \qquad \text{et} \qquad y_a = \rho\sin\theta = 2\sin 0 = 0$$

Les coordonnées cartésiennes de A dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont donc $(2;0)$

2. Comme B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ on a :

$$OA = OB = 2 \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$$

Par conséquent

$$(\vec{i};\overrightarrow{OB}) = (\vec{i};\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = 0 + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Nous venons de montrer que $\left(2; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ sont les coordonnées polaires de B. Et donc :

$$x_b = \rho \cos\theta = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad y_b = \rho\sin\theta = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Nous venons de montrer que $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ sont les coordonnées cartésiennes de B Nous pouvons désormais calculer celle de I que nous notons $(x_I; y_I)$:

$$x_I = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{y_a + y_b}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. (a) Comme B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ on a $OA = OB$, ce qui prouve que le triangle OAB est isocèle en O et donc la médiane issue de O est aussi la bissectrice, par conséquent :

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OI}) = \frac{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

   (b) Comme on connait les coordonnées cartésiennes de I on en déduit que

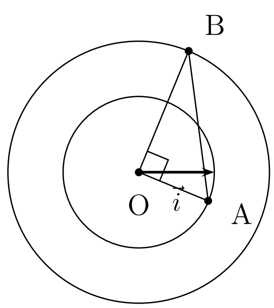
$$\rho_I = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}+2+2}}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}}}{2}$$

   Les coordonnées polaires de I sont donc $\left(\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{2}}}{2}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$

4. Comme les coordonnées polaires de I sont $\left(\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{2}}}{2}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$ on a $\cos\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{x_I}{\rho_I} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{8-2\sqrt{2}}}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{y_I}{\rho_I} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{8-2\sqrt{2}}}$

<u>Exercice</u> 3. **4 points**

Soit un repère polaire $(O; \vec{i})$.



1.
2. $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2}$
3. Le triangle OAB est rectangle O, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

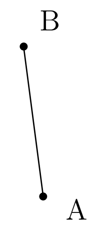
$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

4. $\cos(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = \dfrac{adj}{hyp} = \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = \dfrac{opp}{hyp} = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{1}{2}$.
   Par conséquent $(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{6}$

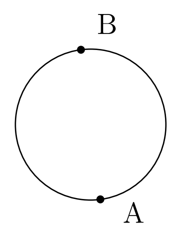
<u>Exercice</u> 4. **2 points**

A et B sont deux points quelconques du plan. Représenter l'ensemble des points M tels que :

1. Si $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \pi$ alors, comme π est un angle plat on aura A, B et M alignés. M doit être situé entre A et B car sinon on aura $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = 0$. L'ensemble cherché est donc le segment $[AB]$



2. Si $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}$ alors le triangle BAM est rectangle en M et $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$ est de sens positif, donc l'ensemble cherché est le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.



<u>Exercice</u> 5. **5 points**

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1. (a) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ alors $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

   (b) $\sin^2\theta = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   On a donc $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4};-\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

   (c) $-\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - \cos\theta + 2 = 0$ On pose $\Theta = \cos\theta$ et on doit résoudre $-\Theta^3 + 2\Theta^2 - \Theta + 2 = 0$
   On remarque que : $-2^3 + 2\times 2^2 - 2 + 2 = 0$, on cherche b tel que :

   $$-\Theta^3 + 2\Theta^2 - \Theta + 2 = (\Theta - 2)(-\Theta^2 + b\Theta - 1)$$

   On trouve par identification (après avoir développer) que $b = 0$ et on résout finalement :

   $$(\Theta - 2)(-\Theta^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow \Theta = 2 \text{ ou } \Theta^2 = -1 < 0$$

   2 est donc l'unique solution de cette équation et $\cos\theta = 2$ n'admet pas de solution réelle, par conséquent l'équation de départ n'admet aucune solution.

   (d)

   $$\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow 2\theta = -\frac{pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad 2\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{avec } k\in\mathbb{Z}$$

Au final

$$\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \theta = -\frac{pi}{8} + k\pi \qquad \text{ou} \qquad \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Dans $]-\pi;\pi]$ les solutions sont donc $\left\{-\frac{\pi}{8};\frac{7\pi}{8};-\frac{3\pi}{8};-\frac{5\pi}{8}\right\}$

2. Comme $\cos 2\theta \in [-1;1]$ et $3\sin\theta \in [-1;1]$ on a $-12 \leq \cos 2\theta + 3\sin\theta - 8 \leq -4$

Exercice 6. **2 points**

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(-2\sqrt{3};-2)$ et $B(-3;3\sqrt{3})$. Construire les points A et B. Vous consulterez la correction faite en classe. [1]

1. Calculer un couple de coordonnées polaires de chacun des points et utiliser les deux sortes de coordonnées pour les placer avec précisions