CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 3 : POLYNÔMES ET SECOND DEGRÉ

Exercice 1. ROC **2 points**

Démontrer la propriété suivante :

> **THÉORÈME 1.** Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le trinôme se factorise ainsi :
> – Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
> – Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

On rappelle et on admettra que $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

Démonstration :

On a : (si $\Delta > 0$)

$$\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
\iff\ & ax^2 + bx + c = a \quad x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \qquad x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\
\iff\ & ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
\iff\ & ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
\iff\ & ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
\iff\ & ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)
\end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

Exercice 2. **4 points**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $$x^2 + 3x = 0 \iff x(x+3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -3$$
   Ainsi $S = \{-3; 0\}$
2. $x^2 + x - 8 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 32 = 33$. Par conséquent l'équation admet deux solutions qui sont :
   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}$$

3. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
   Cette équation admet une solution évidente, qui est -1. En effet $-1 + 1 - 1 + 1 = 0$. On peut donc factoriser $x^3 + x^2 + x + 1$ par $x + 1$:
   $$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + bx + 1) = x^3 + (b + 1)x^2 + (b + 1)x + 1$$
   Par identification on trouve $b = 0$, ce qui montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$
   donc $x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \iff (x + 1)(x^2 + 1) \iff x = -1 \qquad$ En effet $x^2 + 1 > 0$
4. $2x^2 - 3x - 6 \leq 0$ On cherche les racines du polynômes, $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 48 = 57$, elles sont donc aux nombres de deux :
   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{4}$$
   On dresse alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{57}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{57}}{4}$		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 3x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left[\frac{3 - \sqrt{57}}{4}; \frac{3 + \sqrt{57}}{4}\right]$

<u>Exercice</u> 3. **6 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. (a) $f(0) = 0^2 + 4 \times 0 - 1 = -1$
   (b) $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 = 20$, donc cette équation admet deux solutions qui sont :
   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$
   (c) Les points communs entre C_f et l'axe des abscisses vérifient $f(x) = 0$. D'après (b) il y a deux points, notons les $A_1(2 + \sqrt{5}; 0)$ et $A_2(2 - \sqrt{5}; 0)$ L'éventuel point d'intersection entre C_f et l'axe des ordonnées a pour abscisse 0 et pour ordonnée $f(0)$ (si ce calcul est possible !)
   D'aprés (a), ce point A_3 a pour coordonnées $(0; -1)$
2. $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ donc $S(-2; -5)$. Comme $a = 1 > 0$ la parabole C_f est tournée vers le haut donc le sommet S correspond à un minimum
3.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe de $x^2 + 4x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Notons $A_4(x; y)$ point d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y = 4x - 1$, alors
   $$y = f(x) = 6x - 2$$
   , i.e :
   $$x^2 + 4x - 1 = 6x - 2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$$
   Au final $A_4(1; f(1))$ et donc $A_4(1; 4)$

Exercice 4. **4 points**

On lance verticalement une balle de tennis à la vitesse de 20 $m.s^{-1}$. La hauteur h (en mètres) atteinte par la balle en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 1,6$

1. La hauteur de la balle au départ est $h(0) = 1,6$ m, elle est, au bout d'une seconde, $h(1) = -5 + 20 + 1,6 = 16,6$ m
2. Déterminer à quel(s) instant(s) la balle atteindra une hauteur de :
   (a) On résout
   $$h(t) = 1,6 \iff -5t^2+20t = 0 \iff t(-5t+20) = 0 \iff t = 0 \qquad \text{ou } -5t+20 = 0 \iff t = 0 \qquad \text{ou } t = 4$$
   La balle atteindra une hauteur de $1,6$ mètres au bout de 4 secondes sachant qu'elle est au départ à une hauteur de $1,6$ mètres.
   (b) On résout $h(t) = 21,6 \iff -5t^2 + 20t - 20 = 0$
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 400 = 0$$
   La balle atteindra la hauteur de $21,6$ mètres à l'instant $t_1 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{-10} = 2$ secondes.
3. On résout $h(t) = 0 \iff -5t^2 + 20t + 1,6 = 0$
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 400 + 32 = 432 = 2 \times 216 = 2^2 \times 108 = 2^3 \times 54 = 2^4 \times 27 = 2^4 \times 3^3$$
   $$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - 12\sqrt{3}}{-10} = \frac{10 + 6\sqrt{3}}{5} \qquad \text{ou} \qquad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 + 12\sqrt{3}}{-10} = \frac{10 - 6\sqrt{3}}{5}$$
   Comme $t_2 < 0$ seul t_1 est solution du problème et la balle retombera au sol au bout de
   $$t_1 \simeq 4,1 \text{secondes}$$

Exercice 5. **4 points**

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (x^2+1)^2 - (4x^2+2)^2$

1. $P(x) = (x^2+1)^2 - (4x^2+2)^2 = x^4 + 2x^2 + 2 - 16x^4 - 16x^2 - 4 = -15x^4 - 14x^2 - 2$, ce qui pour que P est une fonction polynôme de degré 4
2. Résoudre $P(x) = 0$. Pour cela posons $\gamma = x^2$ on a alors $\gamma^2 = x^4$ et
   $$P(x) = 0 \iff -15\gamma^2 - 14\gamma - 2 = 0$$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 120 = 76 = 2 \times 38 = 2^2 \times 19$, et donc il y a deux réels qui vérifient l'équation $-15\gamma^2 - 14\gamma - 2 = 0$:
   $$\gamma_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 + 2\sqrt{19}}{-30} = \frac{-7 - \sqrt{19}}{15} < 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = \frac{14 - 2\sqrt{19}}{-30} = \frac{-7 + \sqrt{19}}{15} < 0$$
   Comme γ_1 et γ_2 sont deux réels négatifs, l'équation $\gamma = x^2$ n'a pas de solution donc le polynôme P n'a pas de racine réelle.