Correction du devoir Surveillé 2 : Les barycentres

Exercice 1. ROC : Prouver le résultat suivant : **4 points**

Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ et H le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors :

$$G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \iff G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

Démonstration :

Soit $H = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors :

$$\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$$

Soit $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ on a :

$$\begin{aligned}
& \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\iff\ & \alpha\overrightarrow{GH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\iff\ & \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\iff\ & (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{GH} + +\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\iff\ & G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Exercice 2. **3 points**

ABCD est un carré.

1. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que :

$$\| \, 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \, \| = AB$$

   Considérons $G = bar\{(A,2)(B,-1)(C,1)\}$, alors $\forall M \in \mathcal{P}$ on a :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

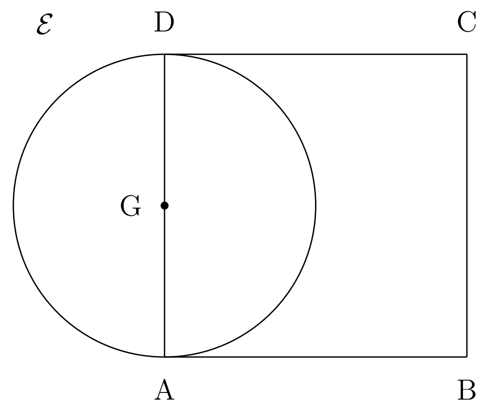
   Il vient :

$$\| \, 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \, \| = AB \iff \| \, 2\overrightarrow{MG} \, \| = AB \iff \| \, \overrightarrow{MG} \, \| = \frac{AB}{2}$$

   $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre G et de rayon $\dfrac{AB}{2}$

2. Pour représenter $\mathcal{E}$, il faut aussi construire le barycentre G, on utilise pour cela la relation suivante :

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



Exercice 3. **2 points**

$G = bar\{(A, 2000); (B, 2000); (C, 3000)\} = bar\{(A, 2); (B, 2); (C, 3)\}$
Comme I est le milieu de $[AB]$ $I = bar\{(A, 2); (B, 2)\}$, donc

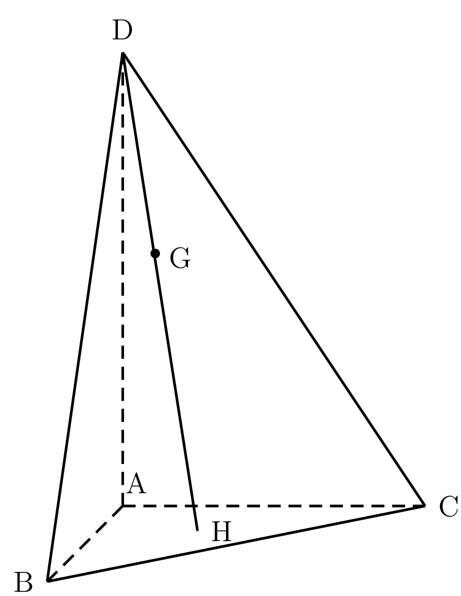
$$G = bar\{(I, 4); (C, 3)\}$$

Donc $G \in (CI)$, ce qui prouve que G, C et I sont alignés

Exercice 4. **4 points**

$ABCD$ est un tétraèdre et G est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1), (D, 4)\}$
H est le centre de gravité du triangle ABC

1. Comme H est le centre de gravité du triangle ABC on a : $H = bar\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$, et donc par associativité on obtient
$$G = bar\{(H, 3); (D, 4)\}$$
2. On situe G grâce à la relation suivante : $\overrightarrow{HG} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{HD}$



Exercice 5. **7 points**

ABC est un triangle de centre de gravité G. On définit les points P, Q, R, S, U et V par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ,\ Q = bar\{(A,1);(B,2)\}\ ,\ \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\ ,\ S = bar\{(A,1);(C,2)\}\ ,\ \overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

1.
$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \iff -\frac{2}{3}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0}$$
donc $P = bar\{(A,2);(B,1)\}$
De plus
$$\overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \iff 3\overrightarrow{BV} = 2\overrightarrow{BV} + 2\overrightarrow{VC} \iff \overrightarrow{VB} + 2\overrightarrow{VC} = \overrightarrow{0}$$
donc $V = bar\{(C,2);(B,1)\}$.

2. Le milieu de $[PV]$ est l'isobarycentre de P et V, or on a :
$$bar\{(P,1);(V,1)\} = bar\{(P,3);(V,3)\} = bar\{(A,2);(B,1);(B,1);(C,2)\} = bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\} = bar\{(A,$$
Attardons nous sur l'égalité : $K = bar\{(A,2);(B,1);(B,1);(C,2)\} = bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\}$:
En effet si on a : $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$

3.
$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AR} + \frac{1}{3}\overrightarrow{RC} \iff -\frac{2}{3}\overrightarrow{RA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{0}$$
donc $R = bar\{(A,2);(C,1)\}$
De plus
$$\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \iff 3\overrightarrow{BU} = \overrightarrow{BU} + \overrightarrow{UC} \iff 2\overrightarrow{UB} + \overrightarrow{UC} = \overrightarrow{0}$$
donc $U = bar\{(B,2);(C,1)\}$.

4. Le milieu de $[RU]$ est l'isobarycentre de R et U, or on a :
$$\begin{aligned} bar\{(P,1);(V,1)\} = bar\{(P,3);(V,3)\} = bar\{(A,2);(C,1);(B,2);(C,1)\} &= bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\} \\ &= bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\} = G \end{aligned}$$

5. On sait enfin que $Q = bar\{(A,1);(B,2)\}$ et que $S = bar\{(A,1);(C,2)\}$, on a :
$$\begin{aligned} bar\{(Q,1);(S,1)\} = bar\{(Q,3);(S,3)\} = bar\{(A,1);(B,2);(A,1);(C,2)\} &= bar\{(A,2);(B,2);(C,2)\} \\ &= bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\} = G \end{aligned}$$
Ainsi G est le milieu de $[SQ]$, donc, en appliquant les questions 2 et 4 les droites (PV), (RU) et (SQ) sont concourrantes en G et les diagonales de $RPUV$ se coupent en leurs milieux donc $RPUV$ est un parallélogramme.