Devoir surveillé 8: Produit Scalaire

Exercice 1. ROC (2 points)

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 :

Soit A et B deux points quelconque du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :

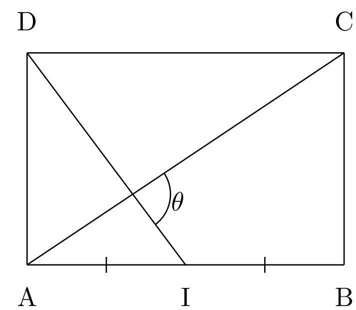
1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
2. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Exercice 2. (2 point)

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(0;0)$, $B(2;1)$ et $C(-1;3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 3. (4 point)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.
I est le milieu de $[AB]$



1. Calculer AC et DI
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI}$
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DI}; \overrightarrow{AC}\right)$ à 0,001 près en degrés.

Exercice 4. (5 points)

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-2;0)$, $B(-7;5)$, $C(3;-4)$ et $\Omega(2;-3)$

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r = 5$
2. Démontrer que $A \in \mathscr{C}$
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$
4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
5. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{BAC}$ est-il droit ?

Exercice 5. (3 points)

ABC est un triangle dans lequel $AB = 3$ et $AC = 7$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$.
Démontrer que ce triangle est rectangle en B. [1]

Exercice 6. (4 points)

Soit $[AB]$ un segment de 6 cm.

1. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 20$
2. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -10$
3. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 50$
4. Représenter ces trois ensembles.

---

1. On pourra utiliser le théorème d'Al-Kashi