Devoir Surveillé 3 : Polynômes

Exercice 1. ROC **2 points**

Démontrer la propriété suivante :

> **THÉORÈME 1.** Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le trinôme se factorise ainsi :
> – Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
> – Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

On rappelle et on admettra que $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

Exercice 2. **4 points**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $x^2 + 3x = 0$
2. $x^2 + x - 8 = 0$
3. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
4. $2x^2 - 3x - 6 \leq 0$

Exercice 3. **6 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. (a) Calculer l'image de 0 par f
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
   (c) En déduire les coordonnées des éventuels points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses ainsi que les coordonnées des éventuels points d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
2. Donner les coordonnées du sommet S de C_f. On précisera si l'extremum de la fonction f est un maximum ou un minimum
3. Dresser le tableau de signe de f
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y = 6x - 2$

Exercice 4. **4 points**

On lance verticalement une balle de tennis à la vitesse de 20 $m.s^{-1}$. La hauteur h (en mètres) atteinte par la balle en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 1,6$

1. Quelle est la hauteur de la balle au départ ? Au bout d'une seconde ?
2. Déterminer à quel(s) instant(s) la balle atteindra une hauteur de :
   (a) $1,6$ mètres
   (b) $21,6$ mètres
3. Déterminer au bout de combien de temps la balle retombera au sol (on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près).

Exercice 5. **4 points**

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x^2 + 2)^2$

1. Montrer que P est une fonction polynôme dont on précisera le degré
2. Résoudre $P(x) = 0$