

DM 8 : La suite de Fibonacci

Exercice 1. But du devoir : Etudier les suites définies par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

On note E l'ensemble des suites vérifiant cette relation de récurrence.

Partie A : Stabilité de l'ensemble E

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites de l'ensemble E . Soit λ et μ deux nombres réels.
Démontrer que la suite $\lambda a_n + \mu b_n$ appartient à l'ensemble E

Partie B : Recherche de suite géométrique appartenant à E

2. On considère une suite géométrique (g_n) de raison q appartenant à l'ensemble E
Démontrer que $g_0 q^n (q^2 - q - 1) = 0$
3. En déduire que (g_n) est soit la suite nulle soit une suite de raison $\varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Partie C : Suite de Fibonacci



Définition 1 :

On appelle suite de Fibonacci la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

4. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6
5. Déterminer les valeurs de λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda \varphi'^n + \mu \varphi^n$$

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi \frac{1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n}$$

7. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$

Partie D : Suite de Fibonacci

On note (u_n) la suite de Fibonacci et S_n la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$$

8. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4
9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$S_n = \sum_{i=0}^n (u_{i+2} - u_{i+1})$$

10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_{n+2} - 1$$