DM 4 : Trigonométrie

Exercice 1. Calcul de $\cos\frac{7\pi}{12}$ **et de** $\sin\frac{7\pi}{12}$

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, A est le point de coordonnées $(1;\sqrt{3})$

1. Calculer les coordonnées polaires de A dans $(O;\vec{i})$
2. B est l'image du point A par la rotation [1] de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Calculer les coordonnées polaires de B dans $(O;\vec{i})$
   (b) Quelles sont les coordonnées cartésiennes de B dans $(O;\vec{i},\vec{j})$?
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du milieu I du segment $[AB]$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
4. Calculer les coordonnées polaires de I dans $(O;\vec{i})$
5. Déduire de 3. et 4. les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 2. L'objectif du problème est de construire puis d'étudier une spirale obtenue à partir d'un carré.

Partie A : Construction

Dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ le carré $OABC$ est tel que : $A(-1;0)$, $B(-1;-1)$, $C(0;-1)$. Les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O, A, B et C sont notées r_O, r_A, r_B et r_C.

1. Placer le point $M_0 = C$, puis M_1, M_2, M_3 et M_4 tels que :
$$r_O(M_0) = M_1 \qquad r_A(M_1) = M_2 \qquad r_B(M_2) = M_3 \qquad r_C(M_3) = M_4$$
2. Continuer le processus pour M_5, M_6, M_7 et M_8, ... avec :
$$r_O(M_4) = M_5 \qquad r_A(M_5) = M_6 \qquad r_B(M_6) = M_7 \qquad r_C(M_7) = M_8$$

Partie B : Des alignements

1. Prouver que $\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{OM_4}$, $\overrightarrow{OM_8}$, $\overrightarrow{OM_{12}}$, ... sont des vecteurs colinéaires et de même sens.
2. Énoncer un résultat analogue à partir des points M_1, M_5, M_9, ... puis de M_2, M_6, M_{10}, ... et enfin de M_3, M_7, M_{11}, ... (il n'est pas demandé de justifier)
3. Sur quelles demi-droites sont M_{20} ? M_{2009} ?

Partie C : Calculs de longueurs de segments

1. Prouver que $M_0M_4 = 4$
2. Démontrer, en utilisant les rotations que :
$$M_0M_4 = M_1M_5 = M_2M_6 = M_3M_7 = \dots$$
   En déduire que pour tout entier k, M_kM_{k+4} est constant.

Partie D : Calculs de longueurs d'arcs

Les arcs successifs $\overset{\frown}{M_0M_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$, $\overset{\frown}{M_2M_3}$, ..., $\overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$, ... forment la spirale.
On note L_n la longueur du trajet de M_0 à M_n

1. (a) Montrer que $L_1 = \frac{\pi}{2}$, $L_2 = 3\frac{\pi}{2}$ puis démontrer que $L_n = \frac{\pi}{2}(1+2+\dots+n)$
   (b) Démontrer que $S = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ [2] puis démontrer que $L_n = \frac{\pi n(n+1)}{4}$
2. Peut-on trouver un point M_n sur la spirale tel que la longueur L_n soit égale à la distance parcourue en neuf tours du cercle trigonométrique ?

1. Dans tous le devoir on retiendra que si B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle θ alors $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \theta$
2. Pour cela en réorganisant astucieusement les termes de S démontrer que $2S = n(n+1)$