# Chapitre 10 : Géométrie dans l'espace

C. Aupérin

2008-2009

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 22 mai 2009

# Table des matières

# Cours : Géométrie dans l'espace

## 1 Règles de base

### 1.1 Les axiomes

**Axiome 1** : Il existe une et une seule droite de l'espace passant par deux points distincts.

**Remarque :** On dit qu'une droite est entièrement déterminée par la donnée de deux points.

**Axiome 2** : Il existe un et un seul plan de l'espace passant par trois points non alignés.

**Remarque :** Lorsqu'un plan contient les points $A$ et $B$, alors il contient tous les points de la droite $(AB)$.

**Propriété 1.** Un plan est entièrement déterminé par
- Trois points non alignés
- Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite
- Un point et deux vecteurs (comme pour les repères du plan)

**Définition 1.** Quand des éléments de l'espace appartiennent à un même plan, on dit que ces éléments sont **coplanaires**.

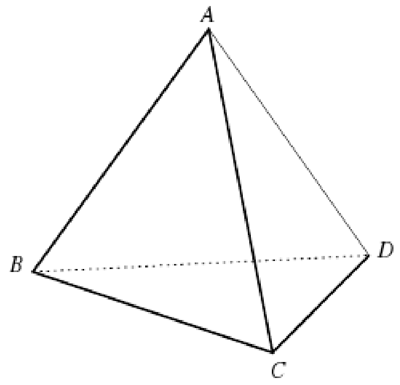
**Remarque :** Deux ou trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

**THÉORÈME 1.** Lorsque tous les éléments d'un problème sont coplanaires, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent (Thalès, Pythagore ...)

**Exercice 1.1.**

On considère $ABCD$ un tétraèdre régulier (les faces sont des triangles équilatéraux) dont les arêtes ont pour longueur $a$. Soient $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Montrer que $IJKL$ est un losange.
3. (a) Calculer $AK$ en fonction de $a$.
   (b) Déterminer la nature du triangle $AKB$.
   (c) En déduire $KI$ en fonction de $a$.
4. Montrer que $IJKL$ et un carré.



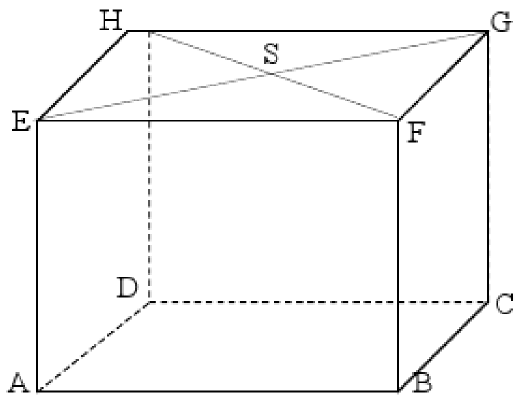

# 2 Positions relatives

## 2.1 De deux plans

*Travail de l'élève* :

Soit $ABCDEFGH$ un cube et $S$ le centre de la face $EFGH$. On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou sans point commun.

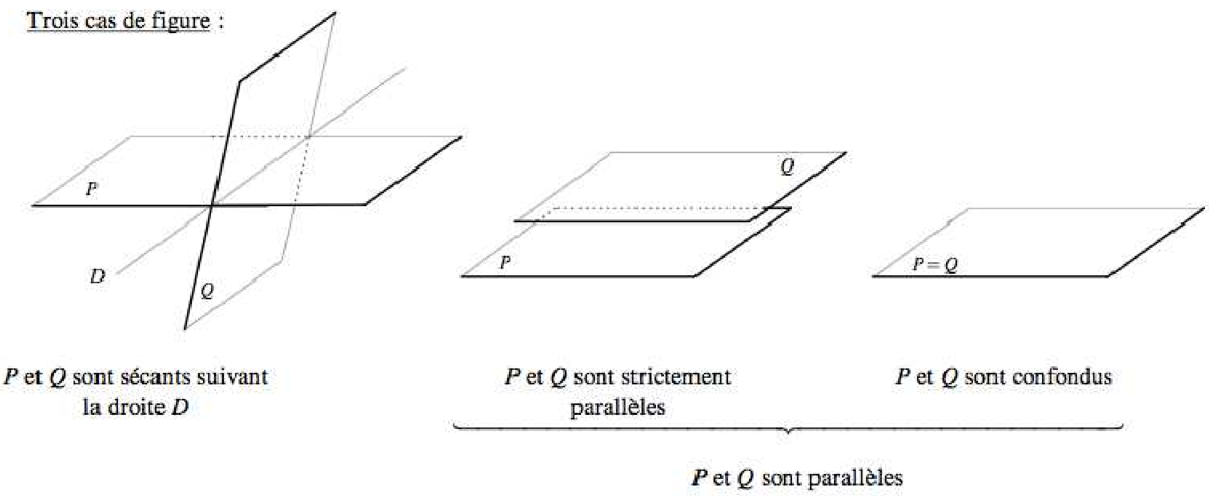
1. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui sont parallèles strictement et parallèles confondus.
2. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui ne sont pas parallèles.
3. Montrer que les plans $(ABC)$ et $(SCD)$ ne sont pas parallèles. Trouver l'intersection de ces plans.




**Définition 2.** On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou sans point commun.

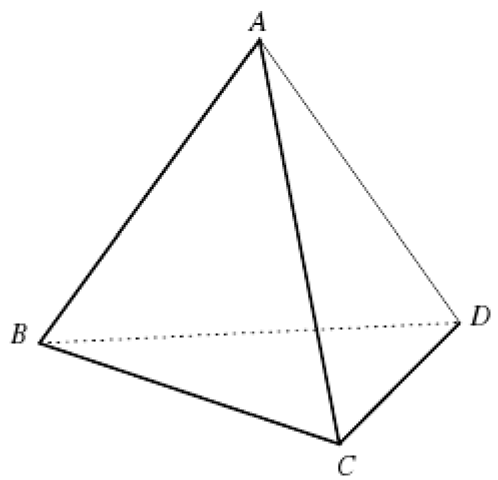
**THÉORÈME 2.** Il existe un plan et un seul passant par un point donné et parallèle à un autre plan.

**Propriété 2.** Deux plans de l'espace sont parallèles ou sécants. Dans ce dernier cas, leur intersection est une droite.




***Problème :*** (servant d'exemple tout au long de la leçon)
On considère $ABCD$ un tétraèdre. Soient $I$, $J$, $K$, $M$ et $N$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans $(ABC)$ et $(IJK)$.
2. Démontrer que les droites $(IJ)$ et $(MN)$ sont parallèles.
3. Déterminer les droites $D_1$ et $D_2$ d'intersection des plans $(ACM)$ et $(BCD)$ puis $(ACM)$ et $(IJK)$.
4. Démontrer que les droites $D_1$ et $D_2$ sont parallèles.
5. Démontrer que la droite $(IJ)$ est parallèle au plan $(BCD)$.
6. Démontrer que les plans $(IJK)$ et $(BCD)$ sont parallèles.




*Réponse à la question 1* :

**Propriété 3.** Dans l'espace, si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles entre eux.

**Exercice 2.1.** $ABCDEFGH$ un parallélépipéde rectangle. Soient $I$ le milieu de $[AB]$, $J$ le milieu de $[BC]$ et $K$ le milieu de $[BF]$.

1. Faire un schéma
2. Démontrer que les plans $(DEG)$ et $(AFC)$ sont parallèles.
3. Démontrer que les plans $(IJK)$ et $(AFC)$ sont parallèles.
4. Déduire des questions 2 et 3 que $(IJK)$ et $(DEG)$ sont parallèles.

## 3 Deux deux droites

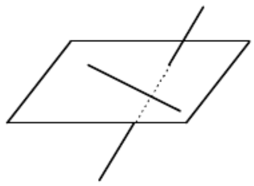
*Travail de l'élève :* Soit $SABC$ un tétraèdre.

1. Les points $S$, $A$, $B$ et $C$ sont-ils coplanaires ?
2. Les droites $(SA)$ et $(BC)$ sont-elles coplanaires ? *(on raisonnera par l'absurde)*

**Propriété 4.**
– S'il existe un plan contenant deux droites $d$ et $d'$, alors $d$ et $d'$ sont soit sécantes, soit parallèles (strictement ou confondues) dans le plan qui les contient.
– Sinon on dit qu'elles sont non coplanaires et elles n'ont pas de points d'intersection.

Si les droites sont coplanaires :

Si les droites ne sont pas coplanaires :

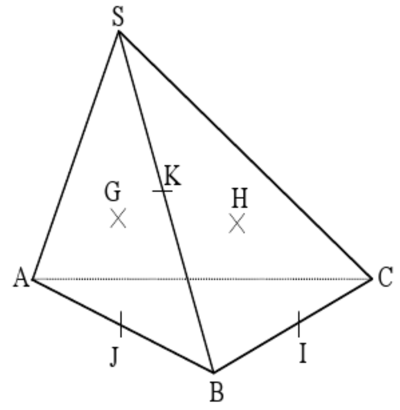


**Remarques :**
– Dans l'espace, deux droites sans points commun ne sont pas forcément parallèles ! Elles peuvent être non coplanaires.
– Dans l'espace, deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont pas forcément de point commun ! Elles peuvent être non coplanaires.
– Dans l'espace, un plan est entièrement déterminer par deux droites sécantes.
– Dans l'espace, un plan est entièrement déterminer par deux droites strictement parallèles.

*Travail de l'élève :*

Soit $SABC$ un tétraèdre et $I$ le mileu de $[BC]$, $J$ celui de $[AB]$, $K$ celui de $[SB]$, $G$ le centre de gravité du triangle $SAB$ et $H$ le centre de gravité du triangle $SBC$.

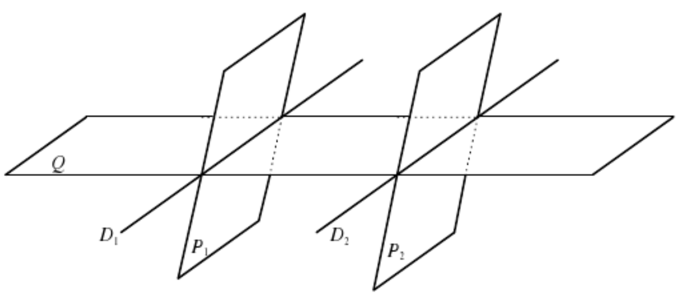
1. (a) Montrer que $(AC)//(IJ)$.
   (b) Montrer que $(IJ)//(GH)$ (triangle $SIJ$).
   (c) Montrer aussi que $(AC)//(GH)$ (triangle $KAC$).
2. On considère le plan parallèle à $(ABC)$ passant par $K$. Comment le dessiner ?




**Propriété 5.** Dans l'espace, si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

*Réponse à la question 2* :

**Propriété 6.** Dans l'espace, si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et leur droites d'intersection sont parallèles.




*Preuve* : Soient $D_1$ et $D_2$ les droites d'intersection. Elles sont coplanaires, donc soit parallèles, soit sécantes. Or si elles sont sécantes en un point $M$ alors $M$ appartient à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, ce qui est absurbde. Donc elles sont strictement parallèles.

*Réponse à la question 3* :

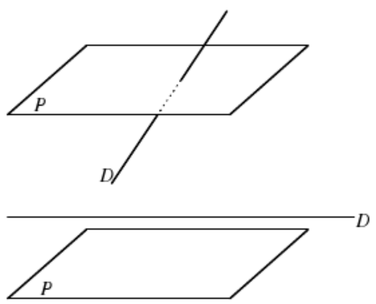
*Réponse à la question 4* :

### 3.1 D'une droite et d'un plan

**Définition 3.** Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Dans le cas contraire, elle est sécante au plan et leur intersection est un point.

**Remarque :** Une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan.

**Propriété 7.** Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est incluse dans ce plan ou elle n'a pas de point commun avec ce plan.




*Preuve* :
- Si $d$ est une droite parallèle à un plan $\mathcal{P}$ telle qu'elle n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$ et qu'elle possède un point comme $A$ avec $\mathcal{P}$. Comme $d//\mathcal{P}$ il existe une droite $d'$ de $\mathcal{P}$ telle que $d//d'$ (strictement car $d \not\subseteq \mathcal{P}$).
  On considère alors la droite $\Delta$ de $\mathcal{P}$, parallèle à $d'$ passant par $A$.
  On a $\Delta//d'//d$ donc $\Delta//d$. Or $A$ appartient à $D$ et à $\Delta$, donc $d$ et $\Delta$ sont confondues. Mais $d \not\subseteq \mathcal{P}$, donc ceci est absurde, notre hypothèse est fausse.
- Réciproquement :
  - Si $d \subset \mathcal{P}$, alors $d$ parallèle à elle-même donc $d$ parallèle à $\mathcal{P}$.
  - Supposons que $d$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection. Alors il existe $A \in \mathcal{P}$ et on a $A \notin d$. On considère alors le plan $\mathcal{P}'$ contenant $A$ et $d$. Comme $d \not\subseteq \mathcal{P}$, on a $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ distincts, avec $A$ pour point commun. Ils sont sécants en une droite $d'$.

Comme $d$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection, $d$ et $d'$ ne sont pas sécantes. Mais elles sont coplanaires (dans $\mathcal{P}'$), donc elles sont strictement parallèles.

On a donc trouver une droite $d'$ de $\mathcal{P}$ parallèle à $d$. On conclut que $d$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

*Réponse à la question 5* :

**Propriété 8.** Une droite et un plan de l'espace sont soit parallèles, soit sécants (et dans ce cas leur intersection est un unique point).

**THÉORÈME 3.** Dans l'espace, si deux droites sécantes (d'un plan) sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

*Réponse à la question 6* :

### 3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

*Travail de l'élève :* Soit $ABCDEFGH$ un cube. Calculer $AG$.

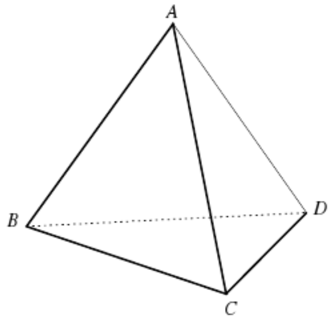
**Définition 4.** Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si elles sont sécantes et perpendiculaires dans le plan qui les contient.
Dans l'espace, une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan en un point $A$, si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan passan par $A$.

**Propriété 9.** Dans l'espace, une droite perpendiculaire à un plan en un point $A$ si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan passant par $A$.

# Les Annexes

# Exercices

**Exercice 1.1.** Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (les faces sont des triangles équilatéraux) dont les arêtes ont pour longueur $a$. Soient $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.




1. Faire un schéma de la situation.
2. Montrer que $IJKL$ est un losange.
3. (a) Calculer $AK$ en fonction de $a$.
   (b) Déterminer la nature du triangle $AKB$.
   (c) En déduire $KI$ en fonction de $a$.
4. Montrer que $IJKL$ et un carré.

**Exercice 1.2.** $ABCDEFGH$ un parallélépipéde rectangle. Soient $I$ le milieu de $[AB]$, $J$ le milieu de $[BC]$ et $K$ le milieu de $[BF]$.

1. Faire un schéma
2. Démontrer que les plans $(DEG)$ et $(AFC)$ sont parallèles.
3. Démontrer que les plans $(IJK)$ et $(AFC)$ sont parallèles.
4. Déduire des questions 2 et 3 que $(IJK)$ et $(DEG)$ sont parallèles.

**Exercice 1.3.** $ABCDE$ un pyramide telle que $BCDE$ soit un parallèlogramme de centre $O$.
$I$ est le milieu de $[AB]$ et $J$ est le milieu de $[AC]$

1. Faire un schéma
2. Préciser en justifiant les intersections :
   (a) Des plans $(ABC)$ et $(ACD)$
   (b) Des plans $(ABD)$ et $(AEC)$
   (c) De la droite $(AO)$ et du plan $(AEC)$
   (d) De la droite $(ID)$ et de la droite $(AO)$
3. Démontrer que la droite $(IJ)$ et la droite $(ED)$ sont parallèles.
4. En déduire l'intersection des plans $(ABC)$ et $(EID)$
5. Montrer que la droite $(IJ)$ et le plan $(BCD)$ sont parallèles.

**Exercice 1.4.** $ABCDEFGH$ un cube. Soient $I$ le milieu de $[AE]$, $J$ le milieu de $[AB]$, $K$ le milieu de $[BC]$ et $L$ le milieu de $[CG]$.

1. Faire un schéma
2. Quelle est la nature du quadrilatère $AILC$ ?
3. Démontrer que les droites $(JK)$ et $(AC)$ sont parallèles.

4. En déduire que les droies $(JK)$ et $(LI)$ sont parallèles.
5. Démontrer que les droites $(IJ)$ et $(KL)$ sont coplanaires.
6. En déduire qu'elles sont s{ecantes en un point $S$.
7. Déterminer l'intersection des plans $(ABF)$ et $(FBC)$.
8. Démontrer que le point $S$ appartient à la droite $(BF)$

**<u>Exercice</u> 1.5.** Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (les faces sont des triangles équilatéraux). Soient $I$, $J$, et $K$ les milieux respectifs de $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$.

1. Démontrer que les droites $(AB)$ et $(IJ)$ sont parallèles.
2. Exprimer $IJ$ en fonction de $AB$
3. Exprimer le périmètre $P'$ du triangle $IJK$ en fonction du périmètre $P$ du triangle $ABC$.
4. Exprimer l'aire $A'$ du triangle $IJK$ en fonction de l'aire $A$ du triangle $ABC$.
5. Exprimer le volume $V'$ du tétraèdre $IJKD$ en fonction du volume $V$ du tétraèdre $ABCD$.

**<u>Exercice</u> 1.6.** On considère un cube $ABCDEFGH$ et $I$ un point de l'arête $[GC]$.

1. Préciser, en justifiant les réponses, si les éléments suivants sont coplanaires ou non :
   (a) Les droites $(EH)$ et $(BC)$
   (b) Les droites $(AG)$ et $(BH)$
   (c) Les droites $(AG)$ et $(EI)$
   (d) Les droites $(BH)$ et $(EI)$
2. Déterminer la position relative des plans $(EGB)$ et $(ACH)$.
3. Expliquer pourquoi $(EH)$ est perpendiculaire au plan $(DCG)$.
4. Le point $I$ appartient au plan $(EGB)$, $(DAG)$, $(EAC)$ ou $(HEF)$ ?

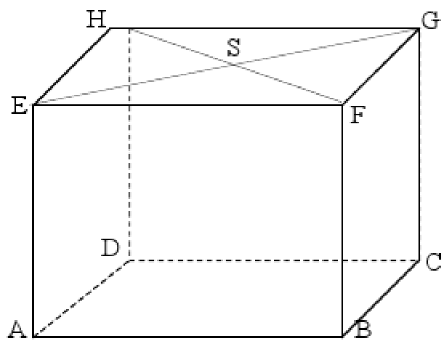
**<u>Exercice</u> 1.7.** On considère une pyramide régulière $SABCD$ de sommet $S$, de base carrée $ABCD$ dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On pose $AB = a$. On appelle $I$ le milieu de $[SA]$, $J$ le milieu de $[SB]$ et $O$ le centre de $ABCD$.

1. Faire une figure en prenant $a = 5$ cm.
2. Montrer que $AC = a\sqrt{2}$.
3. Démontrer $(SA)$ et $(SC)$ sont perpendiculaires.
4. Déterminer, en jusitifant les intersections suivantes :
   (a) des plans $(SAB)$ et $(SBC)$
   (b) des plans $(SAC)$ et $(SBD)$
   (c) de la droite $(SO)$ et du plan $(ADC)$
5. (a) Démontrer que les points $A$, $C$, $S$, $O$ et $I$ sont coplanaires.
   (b) En déduire que les droites $(CI)$ et $(SO)$ sont sécantes. Que représente leur intersection pour le triangle $SAC$ ?
6. Déterminer la position relative des droites $(SB)$ et $(AC)$.
7. Démontrer que $(IJ)$ est parallèle au plan $(ABC)$.

## Position relative de deux plans

Soit $ABCDEFGH$ un cube et $S$ le centre de la face $EFGH$. On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou sans point commun.

1. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui sont parallèles strictement et parallèles confondus.
2. En utilisant les faces du cube, citer des plans qui ne sont pas parallèles.
3. Montrer que les plans $(ABC)$ et $(SCD)$ ne sont pas parallèles. Trouver l'intersection de ces plans.



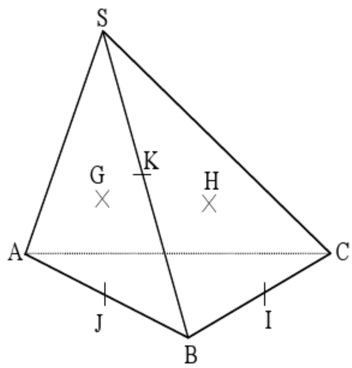

## Transitivité du parallélisme

Soit $SABC$ un tétraèdre et $I$ le mileu de $[BC]$, $J$ celui de $[AB]$, $K$ celui de $[SB]$, $G$ le centre de gravité du triangle $SAB$ et $H$ le centre de gravité du triangle $SBC$.

1. (a) Montrer que $(AC)//(IJ)$.

   (b) Montrer que $(IJ)//(GH)$ (triangle $SIJ$).

   (c) Montrer aussi que $(AC)//(GH)$ (triangle $KAC$).
2. On considère le plan parallèle à $(ABC)$ passant par $K$. Comment le dessiner ?




## Problème

On considère $ABCD$ un tétraèdre. Soient $I$, $J$, $K$, $M$ et $N$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

1. Déterminer l'intersection des plans $(ABC)$ et $(IJK)$.
2. Démontrer que les droites $(IJ)$ et $(MN)$ sont parallèles.
3. Déterminer les droites $D_1$ et $D_2$ d'intersection des plans $(ACM)$ et $(BCD)$ puis $(ACM)$ et $(IJK)$.
4. Démontrer que les droites $D_1$ et $D_2$ sont parallèles.
5. Démontrer que la droite $(IJ)$ est parallèle au plan $(BCD)$.
6. Démontrer que les plans $(IJK)$ et $(BCD)$ sont parallèles.