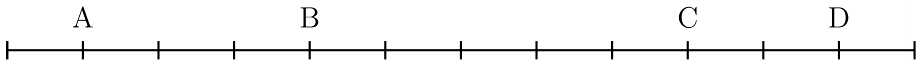
Dernière modification : 28 novembre 2008

Devoir surveillé °2

Exercice 4.1. (1 point)

À partir de la droite graduée ci-dessous, compléter les égalités suivantes à l'aide d'un nombre réel.



$$\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{CD}\,; \quad \overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}\,; \quad \overrightarrow{AD} = \ldots \overrightarrow{DC}\,; \quad \overrightarrow{CB} = \ldots \overrightarrow{DA}$$

Exercice 4.2. (1 point)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(3005;4003)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 4.3. (7 points) ABC est un triangle de centre de gravité G. Le point Z est le milieu de $[AC]$.

1. Faire une figure à la règle non graduée et au compas.
2. Placer sur cette figure les points I, J et K tels que :
$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{JC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
3. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK
4. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BZ}$
5. Démontrer que $BIJG$ est un parallèlogramme.

Exercice 4.4. (11 points) Unité graphique : 1 cm
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;5)$, $B(4;-2)$, $C(-5;1)$ et $D(-1;6)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la longueur du segment $[AC]$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ? Justifier.
5. Déteminer, en justifiant par des calculs, les coordonnées des points E, F, et G définis respectivement par :
   (a) $ABCE$ est un parallèlogramme
   (b) F est le symétrique de A par rapport à C
   (c) Les segments $[GD]$ et $[BC]$ ont le même milieu
6. Le point H est tel que $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   (a) Construire H à la règle non graduée et au compas
   (b) Retrouver les coordonnées du point H par le calcul.
7. Démontrer que B est le milieu du segment $[AG]$.

Correction DS 2

Exercice 4.1. (1 point)

$$\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{CD}\,;\quad \overrightarrow{AC}=\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}\,;\quad \overrightarrow{AD}=-5\overrightarrow{DC}\,;\quad \overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

Exercice 4.2. (1 point) On choisit par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On a $\overrightarrow{AB}(3,4)$ et $\overrightarrow{AC}(3003;4004)$. On constate que $\overrightarrow{AC}=1001\times\overrightarrow{AB}$. Deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires. Donc A, B et C sont alignés.

Exercice 4.3. (7 points)

3.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK} &= \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AK}\\ &= \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CJ}\\ &= \vec{0}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{car } G \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC\\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{3}\vec{0}=\vec{0} \quad \text{Donc le point } G \text{ est le centre de gravité de } IJK.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CJ}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{ZC}\right)+\frac{1}{3}\times\left(2\overrightarrow{CZ}\right)\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BZ}+\frac{2}{3}\overrightarrow{ZC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CZ}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BZ}\end{aligned}$$

5. G est le centre de gravité du triangle ABC donc il est situé aux deux-tiers de la médiane en partant du sommet. Par exemple on a : $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BZ}$. Donc $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{IJ}$ et $BGJI$ est un parallélogramme.

Exercice 4.4. (11 points)

1. Figure
2. On a $\overrightarrow{AC}(-7;-4)$. Donc $AC=\sqrt{(-7)^2+(-4)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$.
3. $\overrightarrow{AB}(2;-7)$, $\overrightarrow{CA}(7;4)$, $\overrightarrow{BC}(-9;3)$ et $\overrightarrow{AD}(-3;1)$.
4. On remarque $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AD}$. Donc les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
5. (a) $ABCE$ est un parallèlogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$. On pose $E(x_E;y_E)$. Alors on a
$\begin{cases}2=-5-x_E\\ -7=1-y_E\end{cases}\iff\begin{cases}x_E=-7\\ y_E=8\end{cases}$ Donc $E(-7;8)$.

   (b) F est le symétrique de A par rapport à C donc $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{CA}$. On pose $F(x_F;y_F)$. Alors on a
$\begin{cases}-5-x_F=7\\ 1-y_F=4\end{cases}\iff\begin{cases}x_F=-12\\ y_F=-3\end{cases}$ Donc $F(-12;-3)$

(c) Les segments $[GD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, donc le quadrilatère $BGCD$ est un parallèlogramme et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DC}$. On pose $G(x_G; y_G)$. Alors on a

$$\begin{cases} x_G - 4 = -5 + 1 \\ y_G + 2 = 1 - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = -7 \end{cases} \quad \text{Donc } G\,(0; -7)$$

6. (b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times (2) + \frac{1}{4} \times (-7) \\ \frac{1}{2} \times (-7) + \frac{1}{4} \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{CH}\left(-\frac{3}{4}; -\frac{9}{2}\right)$

On note $H(x_H; y_H)$. Alors $\overrightarrow{CH}(x_H+5; y_H-1)$. Donc on a : $\begin{cases} x_H + 5 = -\frac{3}{4} \\ y_H - 1 = -\frac{9}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = -\frac{23}{4} \\ y_H = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Donc $H\left(-\frac{23}{4}; -\frac{7}{2}\right)$.

7. Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu du segment $[AG]$. Alors $x_I = \frac{2+0}{2} = -1$ et $y_I = \frac{5-7}{2} = -1$. Ce ne sont pas les corrdonnées de B. Donc B n'est pas le milieu du segment $[AG]$.